

MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI LAPOK

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT MEGBIZÁSÁBÓL

SZERKESZTIK

FEJÉR LIPÓT és ZEMPLÉN GYŐZŐ

HUSZONHARMADIK ÉVFOLYAM

I. FÜZET

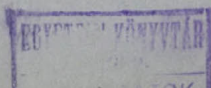
1914

JANUÁR.

BUDAPEST

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA
A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT

1914.



TARTALOM.

	Lap
SZASZ OTTÓ: Egy determinánstételtől	1
GROSSCHMID LAJOS: Lamé egyik számelméleti tételének új behizonyítása	5
SKOPÁL ISTVÁN: Kollineár alapalakzatok involutorius metszetei	10
RYBÁR ISTVÁN: A Zeemann-féle jelenségre vonatkozó újabb vizsgálatokról	27
BÁRÓ HARKÁNYI BÉLA: A fénysebesség változásának szerepe asztronómiai jelenségeknél	33
<i>Physikai Szemle</i> : A katódsugarak nyomása 39. — A víz mágneses susceptibilitása 40. és 42. — A Babinet-Soleil-Szivessy-féle kompenzátorról 43. — A sugárzás-mérésekről 47. és 48.	
<i>Physikai Laboratorium</i> : Elektromos időmérő-készülék 50. — A levegő relatív nedvességének meghatározása refraktométerrel 52.	
<i>Előadási kísérletek</i> : Kísérlet az erő fogalmának bevezetéséhez 53.	

Értesítjük olvasóinkat, hogy folyó évi január elsejétől fogva e Lapok szerkesztését az alulírottak vették át. E munkánkban az eddigi szellemhez óhajtván ragaszkodni, hangsúlyozzuk t. munkatársaink előtt, hogy igen szívesen közlünk oly rövid és alapos dolgozatokat, a melyek a tudománynak különösen újabb eredményeit könnyen érthető modorban ismertetik.

Fejér Lipót és Zemplén Győző.

A folyóirat szellemi részét illető közlemények (cikkek, feladatok, stb.) a szerkesztőkhöz küldendők, és pedig a matematikai tárgyuak *Fejér Lipót (V., Falk Miksa-utca 15.)*, a fizikai tárgyuak pedig *Zemplén Győző (I., Fehervári-út 54/a)* címére. T. munkatársainkat kérjük, hogy kézírataikra mindenkor írják fel a pontos címet, melyre a korrekturák küldendők.

Minden szerzőnek 25 pld. különlenyomatot adunk üres borítékkal (kivéve az *Irodalom*, *Physikai Szemle*, *Physikai Laboratorium*, *Megoldott feladatok* stb. rovatokban megjelent közleményeket). Címzett borítékot vagy több különlenyomatot csak külön kívánságra, a megfelelő költségek felszámításával adhatunk.

A Lapok 1913. évi hátralékos füzetei rövid időn belül meg fognak jelenni.

Társulati mondanivalók. A huszonharmadik társulati év 1914 január elsején kezdődött.

A **tagsági díj** (Budapesten 10 korona, vidéken 6 korona) az Alapszabályok VII., 12. §-a szerint az év első negyedében esedékes. Kérjük t. Tagtársainkat, szíveskedjenek a tagsági díjat a társulat pénztárnoka: *Privorszky Alajos* (VII., Ilka-u. 32) címére beküldeni. A múlt évekről hátralékban lévő tagtársainkat sürgősen kérjük a tagsági díj beküldésére. **A befizetések megkönnyítése végett postai befizető-lapokat mellékelünk e füzetünkhöz.**

Kérjük tagtársainkat, hogy mindazokat, a kik a matematika vagy fizika iránt érdeklődnek, tagokul ajánlják. A tagajánlások és a társulat ügyeire vonatkozó egyéb kérdések *Zemplén Győző* ügyvivő titkár fenti címére intézendők.

A reklamációk, címváltozások a pénztárnokhoz intézendők.

MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI LAPOK

HUSZONHARMADIK KÖTET,

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT MEGBIZÁSÁBÓL

SZERKESZTIK

FEJÉR LIPÓT és ZEMPLÉN GYÖZŐ



BUDAPEST 1914

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT

MATHEMATIKAI PHYSIKAI LAPOK

ELŐZŐKÖNYVÉK KÖTET

50255



A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI LAPOK

HUSZONHARMADIK KÖTETÉNEK TARTALMA.

Első füzet.

Szász OTTÓ: Egy determinánstételről 1. l. — GROSSCHMID LAJOS: Lamé egyik számelméleti tételének új bebizonyítása 5. l. — SKOPÁL ISTVÁN: Kolineár alapalakzatok involutorius metszetei 10. l. — RYBÁR ISTVÁN: A Zeemann-féle jelenségre vonatkozó újabb vizsgálatokról 27. l. — BÁRÓ HARKÁNYI BÉLA: A fénysebesség változásának szerepe asztronómiai jelenségeknél 33. l. — *Physikai Szemle*: A katódsugarak nyomása 39. l. — A víz mágneses susceptibilitása 40. és 42. — A Babinet—Soleil—Szivessy-féle kompenzátorról 43. l. — A sugárzásmérésekről 47. és 48. ll. — *Physikai Laboratorium*: Elektromos időmérő-készülék 50. l. — A levegő relativ nedvességének meghatározása refraktometerrel 52. l. — *Előadási kísérletek*: Kísérlet az erő fogalmának bevezetéséhez 53. l.

Második füzet.

TIHANYI MIKLÓS: Adalék a számelmülethez 57. l. — PRIVORSZKY ALAJOS: A függvénytan elméletéhez 61. l. — TILLINGER ISTVÁNKA: A transcendens egész függvények növekedésének vizsgálata kapcsolatban az analitikai függvények szingularitásainak vizsgálatával (Első közlemény) 72. l. — OLTAY KÁROLY: A Nagy Magyar Alföldön, a Mezőségen és a Gyergyói Fensíkon végzett nehézséggyorsulás-méréseim végeredményei 82 l. — *Physikai Szemle*: A kombinációs hangokról (BARTONIEK) 103. l. — C. Benedicks: A Planck-féle energiaeioszlási törvény levezetése agglomerációs hipotézissel (TOMITS) 106. l. — *Physikai Laboratorium*: A vízvezeteki nyomást csökkentő és állandó nyomásmagasságot biztosító készülék (SCHULLER) 108. l. — *Előadási kísérletek*: Készülék két körmozgás egyenes eredőjének bemutatására (SCHULLER) 110. l. — A Stevart-féle lejtő némi kiegészítéséről (SCHULLER) 112. l.

Harmadik füzet

GEÖCZE ZOÁRD: Koczkát kitöltő, zérus területű felület példája 115. l. — TILLINGER ISTVÁNKA: A transcendens egész függvények növekedésének vizsgálata kapcsolatban az analitikai függvények szingularitásainak vizsgálatával 118. l. — BARTONIEK EMIL: A Röntgensugarak természetéről 144. l. — *Physikai Szemle*: Hidrogén-, nitrogén- és oxigén-cső sugarak fénykeltése (VEGARD—KÜSSLER) 157. l. — A cső sugarak szekundér-sugárzása (BAERWALD—KÜSSLER) 159. l. — *Physikai Laboratorium*: Egyszerű higany-megszakító elektromágnessel hajtott inga számára (SCHULLER) 161. l. — *Irodalom*: Die Theorie der Strahlung und der Quanten (ZEMPLÉN) 164. l. — Tables annuelles des constantes et données numériques 167. l. — Javitandó 168. l.

Negyedik füzet.

TILLINGER ISTVÁNKA: A transcendens egész függvények növekedésének vizsgálata kapcsolatban az analitikai függvények szingularitásainak vizsgálatával (Harmadik és befejező közlemény) 169. l. — GOLDZIER KÁROLY: A járadékszámítás kamatlábproblémája 184 l. — HEVESY GYÖRGY: Az atomok szerkezetéről (Első közlemény) 192. l. — *Physikai Szemle*: G. WIETZEL: Fémek termoelektromos viselkedése mély hőmérsékleteken (BARTONIEK) 208 l. — A Röntgensugarak reflexiójáról és spektrumáról (BARTONIEK) 209. l. — SCHMIDT K. E. F.: Az elektromágneses hullámok hatásköréről (POGÁNY) 213. l. — A. EINSTEIN: A fotokémiai æquivalens egy törvényének termodinamikai levezetése (TOMITS) 215. l. — V. HENRI: Módszer az abszorpczió mennyiségi mérésére az ibolyántúli spektrumban (TOMITS) 217. l. — *Physikai Laboratorium*: H. DESLANDRES és A. PEROT: Kísérletek erős mágneses terek létesítésére (BARTONIEK) 219. l. — *Előadási kísérletek*: SCHULLER A.: Az esőgépkísérletekről 221. l. — *Előadásainkról* 227. l.

Ötödik füzet.

GOLDZIER KÁROLY: A járadékszámítás kamatlábproblémája 231. — SCHWEITZER PÁL: Egy egyenlőtlenség az aritmetikai középértékről 257. l. — SZILÁRD BÉLA: Az elektromos feszültség távolból való méréséről, kontaktus nélkül 262. l. — *Physikai Szemle*: H. RUKOP és J. ZENNEK: Nagy frekvenciájú áram transzformálása a frekvencia háromszorosára (GYULAI Z.) 268. l. — Mérések a víz elektromágneses spektrumában, lökészerűen gerjesztett, kevésbé csillapított 60—20 cm. hullámhosszúságú rezgésekkel (RUKOP, SELÉNYI) 270. l. — *Physikai Laboratorium*: J. HARTMANN: Műszer és eljárás a felületi fényességnek fotografikus mérésére 273. l. — E. LEHMANN: Egy új fotométerkonstrukció 275. l. — P. P. KOCH: Regisztráló mikrofotométer (SELÉNYI) 275. l. — A Matematikai és Physikai Társulat

XXI. rendes közgyűlése. 276. l. — Előadásainkról 284. l. — Új tagjaink névjegyzéke 286. l.

Hatodik, hetedik és nyolczadik füzet.

KÖNIG DÉNES: König Gyula utolsó művéről 291. l. — EGERVÁRY JENŐ: Az integrálegyenletek egy osztályáról 303. l. — LUKÁCS FERENCZ: A Laplace-sorról 356. — KÜRSCHÁK JÓZSEF: Kitűzött teladat 378. l. — A Matematikai és Fizikai Társulat XXI. tanulóversenye, 379. l. — A Matematikai és Fizikai társulat XXI. tanulóversenyén b. Eötvös Loránd-díjjal jutalmazott dolgozatok: I. *Zigány Ferencz* dolgozata 381. l. — II. *Prónai Jenő* dolgozata 384. l.

NÉVSZERINTI TÁRGYMUTATÓ

A XXIII. KÖTETHEZ.

Önálló és ismertető dolgozatok.

	<i>Lap</i>
BARTONIEK EMIL: A Röntgensugarak természetéről.....	144
EGERVÁRY JENŐ: Az integrálegyenletek egy osztályáról.....	303
GEÖCZE ZOÁRD: Koczkát kitöltő, zérus területű felület példája.....	115
GOLDZIER KÁROLY: A járadékszámítás kamatlábproblémája. (Első köz- lemény.).....	184
— A járadékszámítás kamatlábproblémája. (Második és befejező köz- lemény.).....	231
GROSSCHMID LAJOS: Lamé egyik számelméleti tételének új bebizonyítása	5
BÁRÓ HARKÁNYI BÉLA: A fénysebesség változásának szerepe asztrono- miai jelenségeknél.....	33
HEVESY GYÖRGY: Az atomok szerkezetéről. (Első közlemény.).....	192
KÖNIG DÉNES: König Gyula utolsó művéről.....	291
KÜRSCHÁK JÓZSEF: Kitűzött feladat.....	378
LUKÁCS FERENCZ: A Laplace-sorról.....	356
OLTAY KÁROLY: A Nagy Magyar Alföldön, a Mezőségen és a Gyergyói Fensíkon végzett nehézsúlygyorsulás-méréseim végeredményei.....	82
PRIVORSZKY ALAJOS: A függvénytan elméletéhez.....	61
RYBÁR ISTVÁN: A Zeemann-féle jelenségre vonatkozó újabb vizsgálá- tokról.....	27
SCHWEITZER PÁL: Egy egyenlőtlenség az arithmetikai középértékről.....	257
SKOPÁL ISTVÁN: Kollineár alapalakzatok involutorius metszetei.....	10
SZÁSZ OTTÓ: Egy determinánstételről.....	1
SZILÁRD BÉLA: Az elektromos feszültség távolból való méréséről, kon- taktus nélkül.....	262
TIHANYI MIKLÓS: Adalék a számelmülethez.....	57
TILLINGER ISTVÁNKA: A transcendens egész függvények növekedésének vizsgálata kapcsolatban az analitikai függvények szingularitásainak vizsgálatával. (Első közlemény.).....	72
— A transcendens egész függvények növekedésének vizsgálata kapcsola- latban az analitikai függvények szingularitásainak vizsgálatával. (Második közlemény.).....	118

Lap

- TILLINGER ISTVÁNKA: A transcendens egész függvények növekedésének vizsgálata kapcsolatban az analitikai függvények szingularitásainak vizsgálatával. (Harmadik és befejező közlemény.)... 169

Physikai Szemle.

- BARTONIEK EMIL: A kombinációs hangokról ... 103
- Fémek termoelektromos viselkedése mély hőmérsékleten (G. WIETZEL-től) ... 208
- A Röntgen-sugarak reflexiójáról és spektrumáról ... 209
- A katódsugarak nyomása (E. v. ANGERER) ... 39
- GYULAY ZOLTÁN: Nagy frekvenciájú áram transzformálása a frekvencia háromszorosára (H. RUKOP és I. ZENNECK) ... 268
- KÜSSLER ELLY: Hidrogén-, nitrogén- és oxigén-csősugarak fénykeltése (VEGARD) ... 157
- A csősugarak szekundér-sugárzása (H. BAERWALD) ... 159
- POGÁNY BÉLA: Az elektromágneses hullámok hatásköréről (SCHMIDT) ... 213
- RYBÁR ISTVÁN: A Babinet-Soleil-Szivessy-féle kompenzátorról ... 43
- SELÉNYI PÁL: A víz mágneses susceptibilitásának meghatározása (P. SÈVE) ... 40
- A víz abszolút susceptibilitásának meghatározása (W. I. DE HAAS és P. DRAPIER) ... 42
- Mérések a víz elektromágneses spektrumában, lökészerűen gerjesztett, kevésbé csillapított 60—20 cm hullámhosszúságú rezgésekkel (H. RUKOP) ... 270
- TOMITS IVÁN: W. GERLACH: A sugárzás mérésének egy abszolút módszere. S. VALENTINER: A Stefan-Boltzmann-féle törvény állandójáról. W. GERLACH: A sugárzásmérések kritikájához. KURLBAUM és VALENTINER válaszai az előbbihez ... 47
- Új módszer a Stefan-Boltzmann-féle törvény együtthatójának mérésére (FÉRY és DRECQ) ... 48
- A fotokémiai æquivalens egy törvényének termodinamikai levezetése (A. EINSTEIN) ... 215
- Módszer az abszorpció mennyiségi mérésére az ibolyántúli spektrumban (V. HENRI) ... 217
- A Planck-féle energiaeloszlási törvény levezetése agglomerációs hipotézissel; egyszerű összefüggés a keménység és a rezgésszám között (C. BENEDICKS) ... 106

Physikai Laboratorium.

- BARTONIEK EMIL: Elektromos időmérőkészülék periodikus jelenségek összehasonlítására (G. LIPPMANN) ... 50

	<i>Lap</i>
BARTONIEK EMIL: A levegő relatív nedvességének meghatározása refraktométerrel (F. GIRAUD)	51
— Kísérletek erős mágneses terek létesítésére (H. DESLANDRES és A. PEROT)	219
SCHULLER ALAJOS: A vízvezetéki nyomást csökkentő és állandó nyomás-magasságot biztosító készülék	108
— Egyszerű higanymegszakító elektromágnessel hajtott inga számára	161
SELÉNYI PÁL: Műszer és eljárás a felületi fényességnek fotografikus mérésére (J. HARTMANN)	273
— Egy új fotometerkonstrukció (E. LEHMANN)	275
— Regisztráló mikrofotometer (P. P. KOCH)	275

Előadási kísérletek.

SCHULLER ALAJOS: Készülék két körmozgás egyenes eredőjének bemutatására	110
— A Stévert-féle lejtő némi kiegészítéséről	112
— Az esőgépkísérletekről	221
ZEMPLÉN GYÖZÖ: Kísérlet az erő fogalmának bevezetéséhez	53

Irodalom.

ZEMPLÉN GYÖZÖ: Die Theorie der Strahlung und der Quanten	164
— Tables annuelles des constantes et données numériques de chimie, de physique et de technologie	167

Társulati ügyek. Tanulóverseny.

Előadásainkról	227
„	284
A Matematikai és Fizikai Társulat XXI. rendes közgyűlése	277
A Matematikai és Fizikai Társulat XXI. tanulmányversenye	379
A Matematikai és Fizikai Társulat XXI. tanulmányversenyén b. Eötvös Loránd-díjjal jutalmazott dolgozatok	
I. Zsigány Ferencz dolgozata	381
II. Prónai Jenő dolgozata	384
Uj tagjaink névjegyzéke	286

MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI LAPOK

E folyóirat évenként 8, legalább három ívnyi füzetben jelenik meg, a nyári hónapok kivételével, a hó második felében.

Előfizetési díj egy évre 10 K. A Matematikai és Physikai Társulat tagjai a folyóiratot tagsági díjuk fejében kapják.

23. évfolyam.

1914, január.

1. füzet.

EGY DETERMINÁNSTÉTELRL.

Egy előbbi cikkemben az HADAMARD-féle determinánstételnek és az ő FISCHER-féle általánosításának egy elemi bebizonyítását adtam.¹ Az HADAMARD-féle tételt NANSON is bebizonyította;² ő ugyan csak valós elemű determinánsokkal foglalkozik, de módszere könnyen kiterjeszthető komplex elemű determinánsokra.

A következőkben a FISCHER-féle tételnek³ egy rövid levezetését közlöm, melyet a NANSON-féle meggondolás czélszerű általánosításával nyertem.

A bebizonyítandó tétel a következő:

Legyen

$$\Delta = \Sigma \pm b_{11} \dots b_{nn}$$

egy HERMITE-féle determináns ($b_{ik} = \bar{b}_{ki}$), a melynek minden átlós aldeterminánsa positiv, akkor érvényes ezen reláció:

$$\Delta \leq (\Sigma \pm b_{11} \dots b_{q-1, q-1}) (\Sigma \pm b_{qq} \dots b_{nn}).$$

E tétel csak látszólag általánosabb, mint idézett cikkem (M) tétele, mert a (b_{ik}) matrixhoz az adott feltételek mellett található egy (u_{is}) matrix úgy, hogy

¹ Math. és Phys. Lapok, XIX (1910), p. 221—227. Újabban T. BOGGIO (Bull. des sc. math., 1911) az HADAMARD-féle tételnek egy bebizonyítását közölte, a mely az én bebizonyítással lényegében egyező; BOGGIO természetesen nem ismerte cikkemet és egy hozzám intézett szíves levelében e fölötti sajnálatát fejezte ki.

² V. ö. doktori értekezésem, (Math. és Phys. Lapok. XXI. (1912). 231. old. lábjegyzete) p. 10, lábjegyzet.

³ Arch. d. Math. u. Phys., Bd. 13 (1908), Satz III (p. 36).

$$b_{ik} = \sum_{s=1}^N u_{is} \bar{u}_{ks} \cdot^1$$

($i, k=1, 2, \dots, n$)

A tétel nyilván érvényes $n=1, 2$ -re; felteszem, hogy az n -nél alacsonyabbrendű determinánsokra érvényes és bebizonyítom, hogy akkor az n -edrendűekre is érvényes.

Δ adjungált determinánsa $(\Sigma \pm B_{11} \dots B_{nn})$ nyilván szintén HERMITE-féle determináns; egy JACOBITól eredő tétel értelmében

$$\Sigma \pm B_{11} \dots B_{\varrho\varrho} = \Delta^{e-1} \Sigma \pm b_{\varrho+1, \varrho+1} \dots b_{nn}, \quad (1)$$

tehát az adjungált determinánsnak is minden átlós aldeterminánsa positiv. De akkor feltevésünk értelmében

$$\Sigma \pm B_{11} \dots B_{\varrho\varrho} \leq B_{\varrho\varrho} \Sigma \pm B_{11} \dots B_{\varrho-1, \varrho-1}, \quad (2)$$

$$B_{\varrho\varrho} \leq (\Sigma \pm b_{11} \dots b_{\varrho-1, \varrho-1}) (\Sigma \pm b_{\varrho+1, \varrho+1} \dots b_{nn}). \quad (3)$$

Az (1), (2) és (3) relációkból következik, hogy

$$\Delta^{e-1} \leq (\Sigma \pm b_{11} \dots b_{\varrho-1, \varrho-1}) (\Sigma \pm B_{11} \dots B_{\varrho-1, \varrho-1})$$

és miután

$$\Sigma \pm B_{11} \dots B_{\varrho-1, \varrho-1} = \Delta^{e-2} (\Sigma \pm b_{\varrho\varrho} \dots b_{nn}),$$

tehát végül

$$\Delta \leq (\Sigma \pm b_{11} \dots b_{\varrho-1, \varrho-1}) (\Sigma \pm b_{\varrho\varrho} \dots b_{nn}). \quad (4)$$

Könnyen kimutatható, hogy el nem tűnő Δ mellett (4)-ben az egyenlőség akkor és csak akkor áll be, ha

$$b_{ik} = 0 \quad (i = \varrho, \varrho+1, \dots, n; k = 1, 2, \dots, \varrho-1). \quad (F)$$

Ez nyilván igaz, ha $n = 1, 2$; felteszem, hogy igaz oly determinánsokra, a melyeknek rendje nem nagyobb, mint $n-1$ s bebizonyítom, hogy akkor Δ -ra is igaz. Mindenekelőtt megjegyezzük, hogy ha Δ nem tűnik el, akkor mindegyik átlós

¹ V. ö. ehhez: FISCHER, loc. cit., p. 3 4, második pont.

aldeterminánsa és a $\Sigma \pm B_{11} \dots B_{q\varrho}$ determináns szintén a zérustól különböző (ez (3)- és (1)-ből következik). Már most világos, hogy (4)-ben az egyenlőség csak akkor állhat fenn, ha úgy (2)-ben, mint (3)-ban is fennáll, azaz — feltevésünk értelmében — ha

$$B_{1\varrho} = 0, B_{2\varrho} = 0, \dots, B_{\varrho-1, \varrho} = 0$$

és

$$b_{fk} = 0 \quad (t + \varrho 1, \dots, n; k = 1, 2, \dots, \varrho - 1).$$

De a (4) reláció a

$$\Sigma \pm B_{\varrho-1, \varrho-1} \dots B_{nn} \leq B_{\varrho-1, \varrho-1} \Sigma \pm B_{\varrho\varrho} \dots B_{nn}$$

és

$$B_{\varrho-1, \varrho-1} \leq (\Sigma \pm b_{11} \dots b_{\varrho-2, \varrho-2}) (\Sigma \pm b_{\varrho\varrho} \dots b_{nn})$$

egyenlőtlenségekből is levezethető; ezért az egyenlőtlenség fennállásához még a következő feltételek is szükségesek:

$$b_{ik} = 0 \quad (i = \varrho, \varrho + 1, \dots, n; k = 1, 2, \dots, \varrho - 2).$$

He végül $B_{\varrho-1, \varrho}$ -t az első $\varrho - 2$ számú sor szerint kifejtjük akkor nyerjük, hogy

$$B_{\varrho-1, \varrho} = b_{\varrho, \varrho-1} (\Sigma \pm b_{11} \dots b_{\varrho-2, \varrho-2}) (\Sigma \pm b_{\varrho+1, \varrho+1} \dots b_{nn})$$

és a $B_{\varrho-1, \varrho} = 0$ feltételből következik, hogy $b_{\varrho-1, \varrho} = 0$. Ezzel kimutattuk, hogy az (F) feltételek szükségesek; hogy elegendők is, az közvetlenül világos.

A tétel még kissé általánosítható, a mennyiben a következő tétel is érvényes:

Ha a $[b_{ik}]_1^n$ determináns minden átlós aldeterminánsa pozitív és ha léteznek olyan b_1, b_2, \dots, b_n számok, hogy $\left[b_{ik} \frac{b_i}{b_k} \right]$ egy HERMITE-féle determináns, akkor

$$[b_{ik}]_1^n \leq [b_{ik}]_1^{\varrho-1} \cdot [b_{ik}]_{\varrho}^n.$$

E tétel onnan következik, hogy a $[b_{ik}]_1^n$ és $\left[b_{ik} \frac{b_i}{b_k} \right]_1^n$ determinánsok homolog átlós al determinánsai egymással megegyező értékűek.

Megjegyzés. Legyen Δ egy orthogonális determináns, akkor

$$\Delta = 1 = \prod_{i=1}^n (b_{i1}\bar{b}_{i1} + \dots + b_{in}\bar{b}_{in})^{\frac{1}{2}}$$

és másrészt

$$1 = \prod_{i=1}^n b_{ii},$$

tehát

$$b_{ii} = 1, \quad b_{ik} = 0, \quad i \neq k.$$

Szavakban: az egyedüli pozitív definit n változós HERMITE-féle alak, a melynek diskriminánsa orthogonális, a következő:

$$x_1\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_2 + \dots + x_n\bar{x}_n.$$

Szász Ottó.

A *Math. és Phys. Lapok* 1912. évfolyamában megjelent «A végtelen determinánsok elméletéhez» cz. dolgozatomban a következők értelemzavaró sajtóhibák fordultak elő:

225. old. 3. lábjegyzet 3. sora; 238. helyett olvasd: 236—237.

231. old. lábjegyzet 7. sora: *Unir* helyett olv. *Muir*.

ugyane lábjegyzet 9. sora: *Dr. Unir* törlendő.

248. old. lábjegyzet: 233. helyett olv. 231.

256. old. első sor felülről: C_m helyett olv. c_m .

LAMÉ EGYIK SZÁMELMÉLETI TÉTELÉNEK ÚJ BEBIZONYÍTÁSA.

A tétel, amelyről szó van, így fogalmazható:

Két egész szám legnagyobb közös osztójának kikeresésében az osztások száma meg nem haladja a kisebbik szám számjegyei számának az 5-szörösét.

G. LAMÉ idevonatkozó értekezése a Comptes Rendus XIX. kötetének 867. lapján található, az 1844. évből. A LAMÉ-félétől eltérő bizonyítást közöl P. BACHMANN Niedere Zahlentheorie című munkája első kötetének 1902-iki kiadásában (IV. Kap. Nr. 8., 9.).

Legyen adva az egész számoknak következő nem-véges sorozata:

$$u_0, u_1, u_2, u_3, \dots; \quad (A)$$

melyekre nézve az

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2} \quad (I)$$

egyszerű, származtató rekursív-formula érvényes; $u_0=0$, $u_1=1$ kezdőértékekkel. (A) sorozatunk alakja tehát közelebbről:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8; 13, 21, 34, 55, 89; 144, \dots$$

A segéd-tétel, mely a későbbi tárgyalások alapja, ez:

Tetszésszerint való n indexre, s minden $i < n$ -re nézve:

$$u_n = u_{i+1} \cdot u_{n-i} + u_i \cdot u_{n-(i+1)}, \quad (II)$$

ha csak $n > 0$. $n=1$ -re, i lehet 0 és más nem. Ekkor (II) adja

$$u_1 = u_1 \cdot u_1 + u_0 \cdot u_0,$$

azaz

$$1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0;$$

$n=2$ -re, i lehet 0 és 1. Ha $i=0$, akkor

$$u_2 = u_1 \cdot u_2 + u_0 \cdot u_1,$$

vagyis

$$1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1;$$

míg ha $i=1$, akkor

$$u_2 = u_2 \cdot u_1 + u_1 \cdot u_0,$$

tehát

$$1 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0.$$

Más oldalról, tetszőszerinti megadott n -re, ha $i=0$ vagy 1, akkor sorban:

$$u_n = u_1 \cdot u_n + u_0 \cdot u_{n-1}$$

és

$$u_n = u_2 \cdot u_{n-1} + u_1 \cdot u_{n-2},$$

melyek helyessége evidens. Legyen tehát egy megadott n -re, (II) helyes minden i indexre egészen i -ig bezárólag. Tehát

$$u_n = u_{i+1} \cdot u_{n-i} + u_i \cdot u_{n-i-1} =$$

$$= u_{i+1} u_{n-i-1} + u_{i+1} \cdot u_{n-i-2} + u_i \cdot u_{n-i-1};$$

vagyis

$$u_n = u_{i+2} \cdot u_{n-(i+1)} + u_{i+1} \cdot u_{n-(i+2)},$$

a mi nem más, mint (II), $i(=)i+1$ -re.

Mindezeket egybevetve, (II) tételünk helyessége következik. (A) sorozatból alkossunk most egy oly

$$v_1, v_2, v_3, \dots \quad (B)$$

sorozatot, melyben egyszerűen $v_n = u_{n+1}$; vagyis tehát (A)-nak

$$1, 2, 3, 5, 8; 13, \dots$$

részletsorát.*

(I)-ből világos, hogy általában $(v_n, v_{n-1})=1$; továbbá, hogy ha $D(v_n, v_{n-1})$ jelenti a $(v_n, v_{n-1})=1$ kikeresésekor az Euklides-féle algorithmusban végzett osztások számát, akkor

$$D(v_n, v_{n-1}) = n-1; \quad (a)$$

* Ez az úgynevezett LAMÉ-féle számsor.

mert

$$v_n = v_{n-1} + v_{n-2},$$

$$v_{n-1} = v_{n-2} + v_{n-3},$$

$$\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot,$$

$$v_4 = v_3 + v_2,$$

$$v_3 = v_2 + v_1,$$

$$v_2 = 2 \cdot v_1.$$

Már most azt állítom, hogy ha $Z(v_n)$ -el a 10-es számrend-szerben kiírt v_n számjegyeinek számát jelölöm, akkor bizonyosan

$$Z(v_n) \geq \lambda, \quad \text{hol } n = 5\lambda - \rho, \quad 0 \leq \rho < 5. \quad (1)$$

(B) sorozatból közvetlenül látjuk, hogy $\lambda=1$, $\lambda=2$ értékekre (1) egyenlőtlenség helyes, minden $0 \leq \rho < 5$ mellett. Világos továbbá, hogy ha (1) fennáll $n=5\lambda-4$ -re, akkor a fortiori, $n+1$, $n+2$, $n+3$, $n+4$ indexekre, mert $v_n < v_{n+1} < \dots < v_{n+4}$, s így szintén:

$$\lambda \leq Z(v_n) \leq Z(v_{n+1}) \leq \dots \leq Z(v_{n+4});$$

minthogy pedig már $n+5=5\lambda+1=5(\lambda+1)-4$, azért ki kell még mutatnom, hogy már $Z(v_{5\lambda+1}) \geq (\lambda+1)$.

Ezt így mutatom meg. Ha $\lambda=1$ és $\lambda=2$, akkor (B) mutatja, hogy

$$v_4 = 5 = 5 \cdot 10^{1-1}; \quad v_5 = 8 > 7 \cdot 10^{1-1}$$

és

$$v_9 = 55 > 5 \cdot 10^{2-1}; \quad v_{10} = 89 > 7 \cdot 10^{2-1}.$$

Legyen általában:

$$v_{5\lambda-1} \geq 5 \cdot 10^{\lambda-1}; \quad v_{5\lambda} \geq 7 \cdot 10^{\lambda-1}. \quad (b)$$

(II)-be $u(=)v$ -ket substituálván, vagyis $u_n = v_{n-1}$ tevén, lesz $n-1(=)n$ -re

$$v_n = v_i \cdot v_{n-i} + v_{i-1} \cdot v_{n-(i+1)},$$

s így, ha $n=5\lambda+4$ s illetve $5(\lambda+1)$, kapjuk sorban $i=4$ s illetve 5-re

$$v_{5\lambda+4} = v_4 \cdot v_{5\lambda} + v_3 \cdot v_{5\lambda-1} = v_{5(\lambda+1)-1}$$

$$= 5 \cdot v_{5\lambda} + 3 \cdot v_{5\lambda-1} \geq$$

$$\geq 7 \cdot 5 \cdot 10^{\lambda-1} + 3 \cdot 5 \cdot 10^{\lambda-1} = 5 \cdot 10^\lambda$$

és

$$\begin{aligned} v_{5(\lambda+1)} &= v_5 \cdot v_{5\lambda} + v_4 \cdot v_{5\lambda-1} = \\ &= 8 \cdot v_{5\lambda} + 5 \cdot v_{5\lambda-1} \geq \\ &\geq 8 \cdot 7 \cdot 10^{\lambda-1} + 5 \cdot 5 \cdot 10^{\lambda-1} > 50 \cdot 10^{\lambda-1} + 20 \cdot 10^{\lambda-1} = 7 \cdot 10^\lambda, \end{aligned}$$

vagyis tehát (b) általánosan igaz.

De (I) alapján

$$v_{5(\lambda+1)-4} = v_{5\lambda} + v_{5\lambda-1},$$

azaz

$$\begin{aligned} Z(v_{5(\lambda+1)-4}) &\geq Z(7 \cdot 10^{\lambda-1} + 5 \cdot 10^{\lambda-1}) = Z(12 \cdot 10^{\lambda-1}) \geq \\ &\geq Z(10^\lambda) = \lambda + 1, \end{aligned}$$

a mi bebizonyítandó volt. Mindezekből pedig (1) általános volta is evidenciába jut.

Láttuk fentebb, hogy volt $D(v_n, v_{n-1}) = n-1$, avagy $n = 5\lambda - \rho$ ($0 \leq \rho < 5$) téve, lesz — ismét $n-1 (=) n -$

$$D(v_{n+1}, v_n) = 5\lambda - \rho \leq 5\lambda \leq 5 \cdot Z(v_{5\lambda-\rho}), \quad (\text{III})$$

a mi pedig nem más, mint LAMÉ tétele az 1, 2, 3, 5, ... sorozat számaira, ha keressük $(v_{n+1}, v_n) = 1$ -et; vagyis tehát a tétel, két-két tetszésszerű szomszédos számára a v -sorozatnak.

Most végül megmutatjuk, hogy a legáltalánosabb eset hogyan függ eme speciálistól.

Legyen e végből tetszőleges, pozitív a, b egész számokra, hol $a > b$, keresendő $(a, b) = \delta$, az osztási eljárással.

Az ismert algoritmus fordított sorrendben írva, nyilván írható:

$$\begin{aligned} r_1 \delta &= r_1 \delta, \\ \delta + q_1(r_1 \delta) &= r_2 \delta, \\ r_1 \delta + q_2(r_2 \delta) &= r_3 \delta, \\ r_2 \delta + q_3(r_3 \delta) &= r_4 \delta, \\ &\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ r_{n-3} \delta + q_{n-2}(r_{n-2} \delta) &= r_{n-1} \delta = b, \\ r_{n-2} \delta + q_{n-1}(r_{n-1} \delta) &= r_n \delta = a = r_{n-2} \delta + q_{n-1} \cdot b. \end{aligned}$$

Közvetlenül világos, hogy $D(a, b) = D(v_{n+1}, v_n) = n$; minthogy pedig $1 < r_1 < r_2 < r_3 < \dots < r_{n-1} < r_n$; azért írhatom

$$r_1 \delta = r_1 \delta,$$

$$(1\delta + 2\delta) + (q_1 r_1 - 2) \delta = 3\delta + (r_2 - 3) \delta,$$

$$(2\delta + 3\delta) + (r_1 - 2) \delta + (q_2 r_2 - 3) \delta = 5\delta + (r_3 - 5) \delta,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$(v_{n-2} + v_{n-1}) \delta + (r_{n-3} - v_{n-2}) \delta + (q_{n-2} r_{n-2} - v_{n-1}) \delta = \\ = v_n \delta + (r_{n-1} - v_n) \delta = b,$$

$$(v_{n-1} + v_n) \delta + (r_{n-2} - v_{n-1}) \delta + (q_{n-1} r_{n-1} - v_n) \delta = \\ = v_{n+1} \delta + (r_n - v_{n+1}) \delta = a,$$

a miből látható, hogy $b = r_{n-1} \cdot \delta \geq v_n$ és így $Z(b) \geq Z(v_n)$; tekintettel (III)-ra kapjuk:

$$D(a, b) = D(v_{n+1}, v_n) \leq 5 \cdot Z(v_n) \leq 5 \cdot Z(b),$$

tehát végül:

$$D(a, b) \leq 5 \cdot Z(b), \quad (a > b > 0).$$

Mely legutóbbi összefüggés épen LAMÉ tétele, a bevezetett symbolumokban; a mi bebizonyítandó volt.

Grosschmid Lajos.



KOLLINEÁR ALAPALAKZATOK INVOLUTORIUS METSZETEI.

(Második közlemény.)

6. Megfordítás.

Vizsgálataink teljessége érdekében szükséges az imént tárgyalt probléma megfordításával is foglalkoznunk.

A σ és σ_1 egyesített kollineár síkokban keresünk oly egyenest, mely involuczióban metszi mindazon megfelelő sugársor-párokat, melyek centrumainak geometriai helye az adott s és s_1 megfelelő egyenespár.

Első sorban felteszszük, hogy az s és s_1 egyenesek különbözők.

Ha most már $|S|$ és $|S_1|$, valamint $|S^*|$ és $|S_1^*|$ két sugársor-pár az adott végtelen sok párból és $|P|$, ill. $|P^*|$ azon sugársorok, melyeknek sugarai involuczióban metszik a kiválasztott első, illetőleg második sugársor-párt, úgy a $\overline{PP^*}$ egyenes a keresett e .

Határozatlanná lesz e , azaz kivételes esettel lesz dolgunk ha P pont összeesik a P^* ponttal. Vegyük ezen esetet vizsgálat alá.

Lehetséges, hogy az s és s_1 bármely két megfelelő pontját összekötő egyenes önönmagának felel meg, azaz a σ és σ_1 perspektív helyzetű. Ez esetben, ha $P \equiv P^*$, úgy e pont nem lehet más, mint a perspektivitás centruma C , és akkor ezt úgy az S és S_1 , mint az S^* és S_1^* harmonikusan választja el a c perspektív tengelytől, vagyis involuczióval van dolgunk.

Ha tehát a σ és σ_1 egyesített síkok kollineációja involutorius, úgy bármely két megfelelő, de nem egyesített $|S|$ és $|S_1|$ sugársort involuczióban metsző egyenesek a centrum sugarai.

Így a tetszőleges s, s_1 egyenes párhoz tartozó e egyenes a centrum bármely sugara.

Ha már most a σ és σ_1 síkok kollineációja nem centrális, úgy az S és S^* kellő választása mellett mindig feltehetjük, hogy az \overline{SS}_1 és $\overline{S^*S_1^*}$ egyenesek nem önönmaguknak felelnek meg. Mivel pedig ez esetben a P az \overline{SS}_1 és a P^* az $\overline{S^*S_1^*}$ egyenesnek mindkét értelemben megfelelő két-két egyenes metszéspontja: nyilvánvaló, hogy a $P \equiv P^*$ pont az \overline{SS}_1 és $\overline{S^*S_1^*}$ egyenesek Q metszéspontjának mindkét értelemben megfelel. Ekkor tehát félinvoluczióval van dolgunk, melynek tengelye a \overline{PQ} egyenes.

A Q pontban találkozó három egyenes: \overline{SS}_1 , $\overline{S^*S_1^*}$ és \overline{PQ} az s és s_1 megfelelő egyenesek megfelelő pontjait kötik össze, ennél fogva (ss_1) pont duplapont, még pedig a félinvoluczió centruma. Ugyanis a félinvoluczióról való elmélkedéseinkben láttuk, hogy a félinvoluczió tengelyének pontjaira nézve perspektív pontsorok sorozói a félinvoluczió centrumának megfelelő egyenespárjai.

Félinvoluczió esetében kivételes össze nem eső egyenespárok a centrum megfelelő egyenesei. Egy ily pontsor-pár megfelelő pontpárjai oly megfelelő sugársorok sorozói, melyeket a tengely ugyanazon egy pontjának összes sugarai involuczióban metszenek. Ezen pont a pontsor-pár perspektivitás-centrumának megfelelője.

Áttérünk ezek után azon eset vizsgálatára, midőn az s és s_1 összeesik.

Ekkor a keresett e egyenes, a mennyiben csak egy ilyen van, összeesik az s egyenessel, mert bármely két megfelelő $|S|$, $|S_1|$ sugársor perspektív és így a hozzájuk tartozó P pont a közös s sugaron van.

A kivételes esetre nézve ki fogjuk mutatni, hogy az előbbi esettel megegyező viszonyokat találunk.

Ha ugyanis az önönmagának megfelelő s egyenesen az S és S_1 , valamint S^* és S_1^* megfelelő pontok oly megfelelő sugársorok sorozói, a melyekhez tartozó P és P^* pontok egybe esnek, úgy két eset lehetséges, t. i. a két sugársor-párhoz tartozó perspektív tengely t és t^* vagy összeesik, vagy nem.

Ha összeesik, úgy a t tengely minden pontja önönmagának felel meg a kollineációban, tehát σ és σ_1 síkok kollineációja perspektivitás.

Minthogy pedig a P ponton áthaladó bármely egyenes úgy az $|S|$ és $|S_1|$, valamint $|S^*|$ és $|S_1^*|$ sugársorokat oly involuczióban metszi, melynek egyik duplapontja P , a másik pedig a t -vel való metszéspont: a két involuczió azonos. Ámde akkor ezen involuczió párjai a kollineációban is megfelelő pontok, így P minden sugara önönmagának felel meg.

Ez esetben tehát a σ és σ_1 kollineációja involutorius a P centrummal és t tengellyel.

A síkbeli involuczióra már előbb talált eredményhez, az itt talált eredményt hozzáfűzvé, azt látjuk, hogy *a centrum sugaraira nézve is az e egyenes a centrum bármely egyenese lehet.*

Így az involutorius síkok bármely egyenes párja problémánk szempontjából kivételes, leginkább kivételes az *involuczió tengelye, melyre nézve az e egyenes a sík bármely egyenese lehet.*

Problémánkat tovább fejtegetve vizsgáljuk azon esetet, midőn a t és t^* perspektivitás-tengelyek nem esnek össze. Ha e mellett F metszéspontjuk az s egyenesen kívül eső, úgy F önönmagának felel meg és \overline{PF} egyenes oly involucziót metsz ki az $|S|$, $|S_1|$, ill. $|S^*|$, $|S_1^*|$ sugársor-párokból, melynek duplapontjai mindkét esetben a P és F pontok: azaz \overline{PF} egyenes mindkét sugársor-párt ugyanazon involuczióban metszi. Ebből ép úgy, mint fentebb következik, hogy a \overline{PF} -en előálló involuczió párjai a kollineációban is megfelelő pontpárok: tehát félinvoluczióval van dolgunk, melynek tengelye a PF egyenes. A vizsgált s egyenesen egyesített megfelelő pontsorok

egyik duplapontja P , a másik duplapontja G a félinvoluczió centruma.

Tehát a félinvoluczió centrumán áthaladó dupla sugarak ép oly módon kivételesek, mint többi egyenespárjai.

Vizsgáljuk még azon lehetőséget, melynél a t és t^* metszéspontja F az s egyenesre esik. Ezen esetben első sorban világos, hogy duplapont az s egyenesen kívül nem lehet. Hogy pedig F duplapont, azt a következő megfontolás mutatja. A t egyenesnek a két különböző értelemben megfelelő t_1 és t_{-1} , a t -ből megfelelő pontpárt metsz ki. Ha e két pont különböző volna, úgy az $|S|$ és $|S_1|$ sugársoroknak volna két megfelelő sugaruk, melyek egymást nem a perspektív tengelyen metszenék, már pedig ez lehetetlen. Tehát a t_1 és t_{-1} ugyanazon pontban metszi t -t, de akkor e pont duplapont, mivel pedig ilyen nem lehet az s -en kívül, kell, hogy e duplapont az $(st) \equiv F$ pont legyen.

Az s egyenesen egyesített projektív pontsorok másik duplapontja a P pont. Ugyanis, mint ismeretes, a két duplapont a megfelelő pontpárokkal projektív kettőspárokat¹ alkot, ámde

$$(SFS_1P) \overline{\wedge} (S^*FS_1^*P),$$

mert ezek harmonikus kettőspárok. A miből még az is következik, hogy az s -en egyesített megfelelő pontsorok involutoriusak, tehát ez esetben is félinvoluczióval van dolgunk. A félinvoluczió centruma az F pont, mert hisz ennek t és t^* egyenesei oly sugársorok perspektív tengelyei, melyeknek centrumaik a félinvoluczió tengelyének megfelelő pontjai.

Ezen eredményt még így is mondhatjuk: *e pontbeli vizsgálataink szempontjából a félinvoluczió tengelye csak akkor kivételes, ha a félinvoluczió centrumán áthalad.*

A kollineár egyesített síkokra vonatkozó vizsgálataink eredményét a következőkben foglaljuk össze:

¹ STAUDT: Geometrie der Lage-ban előforduló «Wurf»-ot akarjuk magyarul «kettőspár»-nak fordítani, minthogy az általánosan használt «kettős viszony» geometriai æquivalense.

A kollineár egyesített σ és σ_1 síkokban az adott e egyenest involuczióban metsző megfelelő sugársor-párok centrumainak geometriai helye két megfelelő s és s_1 egyenes; és fordítva az összes sugársor-párokat, melyeknek centrumaik két s és s_1 megfelelő egyenes pontpárjai, csak egy egyenes metszi involuczióban.

Kivétel csakis az involuczió és félinvoluczió esetében van.

Involuczió esetében a tetszőleges e egyenest involuczióban metsző sugársor-párok azok, melyeknek centrumaik az involuczió tengelyének pontjai; kivételesek az involuczió centrumának egyenesei, melyek mindenikét az összes sugársor-párok involuczióban metszik. Megfordítva: az összes sugársor-párokat az involuczió centrumának minden egyenesre involuczióban metszi, míg a tengely pontjai sorozói oly megfelelő sugársoroknak, melyek a sík összes egyenesét involuczióban metszik.

Félinvoluczió esetében a tetszőleges e egyenest involuczióban metsző sugársor-párok centrumainak geometriai helye a centrum két megfelelő egyenesre; kivételes csak a félinvoluczió tengelye, melyet az összes sugársor-párok involuczióban metszenek. Megfordítva: mindazon sugársor-párokat, melyeknek centrumaik két megfelelő s és s_1 egyenes párjai, általában csak a félinvoluczió tengelye metszi involuczióban; kivételesek a centrum egyenes párjai, egy ily egyenes pár megfelelő pontpárjai sorozói oly megfelelő sugársoroknak, melyek mindenikét a tengely egy pontjának összes sugarai involuczióban metszik.

★

Mielőtt az egyesített kollineár síkoknak problémánk szempontjából való vizsgálatát abba hagynók, még egy fontos észrevételt kell tennünk.

Ha az e egyenesen a P pontot felvesszük, a hozzá tartozó S és S_1 pontokat úgy szerkeszthetjük meg, hogy a P pontnak a két különböző értelemben megfelelő P_1 és P_{-1} pontokat összekötő egyenesen felkeressük az általában egyetlen meg-

felelő pontpárt és ez a keresett S, S_1 . Ha már most P befutja az e pontsort, a P_1, P_{-1}, S és S_1 befutja az e_1, e_{-1}, s , illetőleg s_1 pontsort. E pontsorok perspektivék a P_1P_{-1} egyenes által leírt másodosztályú görbéhez. E másodosztályú görbének, mint a σ -hez tartozó alakzatnak a σ_1 síkban megfelelő görbét leírja a \overline{PS}_1 egyenes, miből következik, hogy az összetartozó P és S_1 pontok projektív pontsorokat írnak le.

Tételben:

Ha a σ és σ_1 kollineár egyesített síkokban két megfelelő S és S_1 sugársor és az őket involuczióban metsző sugarakból alakult P sugársor centrumai egyenes pontsorokat írnak le, úgy ezen s, s_1, e pontsorok projektívek.

Tételünk e fogalmazásban a kivételes eseteket kizárja, pedig általában és bizonyos értelemben ezeknél is érvényes marad.

Ugyanis, ha s és s_1 az involuczió esetében egy tetszőleges egyenespár, a félinvoluczió esetében pedig a centrum valamely egyenes párja, úgy bármely S és S_1 pontpárjukhoz ugyanazon P pont tartozik és az e egyenes ennek bármely egyenese lehet. Ha már egyet kivesszünk ezek közül, úgy az s és s_1 minden pontjának ugyanazon egy P pont felel meg, de az (ss_1) pontnak az e bármely pontja. Vagyis ez esetekben az s és e pontsor között degenerált projektivitás áll fenn, az úgynevezett «kollineáció szinguláris elemekkel».

Teljesen kivételes az involuczió tengelye.

7. Problémánk nem egyesített kollineár síkpontok esetében.

Az egyesített kollineár síkokra vonatkozólag az utóbbi három pontban foglalt fejtegetéseinkkel dualis és reciprok vizsgálatok analog eredményekre vezetnek; minthogy ezek csak az ismeretes szó változtatásokat kívánják meg, kimondásukat mellőzhetjük.

Áttérünk nem egyesített kollineár $[T]$ és $[T_1]$ síkpontok vizsgálatára, keresvén e síkpontok mindazon megfelelő sík-

sorait, melyek a tetszőlegesen megadott e egyenest involuczióban metszik.

E probléma visszavihető a 4. pontban tárgyaltra. Ugyanis e egyenesen át tett bármely π sík a $[T]$ és $[T_1]$ síkpontokból két egyesített kollineár sugársíkot metsz ki, a melyben az e egyenest involuczióban metsző megfelelő sugársorok a $[T]$ és $[T_1]$ azon megfelelő síksorainak metszetei, melyek az e egyenest involuczióban metszik. Minthogy pedig a π sík ezen megfelelő sugársorainak centrumai két s és s_1 megfelelő egyenes pontpárjai, nyilvánvaló, hogy a keresett síksorok tengelyei két megfelelő sugársort alkotnak azon τ és τ_1 síkokban, melyek a π -ből az s , ill. s_1 egyeneseket metszik ki.

Az így talált $|T\tau|$ sugársor $abc\dots t\dots$ elemeinek a $|T_1\tau_1|$ sugársorban megfelelő elemek $a_1b_1c_1\dots t_1\dots$. Ha még azon lineáris sugárkomplexot, melynek sugarai a $[t] \wedge [t_1]$ síksorpárt involuczióban metszik Γ_t -vel jelöljük, úgy a

$$\Gamma_a, \Gamma_b, \Gamma_c, \dots, \Gamma_t, \dots$$

sugárkomplexok egy egyszerűen végtelen nagy — egyméretű — sokaságot alkotnak.

Nyilvánvaló, hogy az e egyenes e komplexsokaság minden tagjának közös sugara. Világos továbbá az is, hogy a tér bármely síkjában van egy ily közös sugár. Mert a tetszőleges ξ sík a $[|T\tau|]$ és $[|T_1\tau_1|]$ síksor-sokaság megfelelő síksorait oly sugársor-párokból metszi, melyek egyrészt megfelelő sugársorai a $[T]$ és $[T_1]$ síkpontokból ξ által kimetszett egyesített sugársíkoknak, másrészt centrumaik két megfelelő egyenes elempárjai és így az előbbi pont fejtegetései szerint mindig van egy és pedig általában csakis egy oly egyenes, mely mind ezen sugársor-párokat involuczióban metszi. Tehát azon egyenesek, melyek a $\Gamma_a\Gamma_b\Gamma_c\dots\Gamma_t\dots$ komplexsokaság összes tagjainak közös sugarai, egy elsőosztályú sugárkongruenciát alkotnak.

Hogy e kongruenzia egyszersmind elsőrendű is, tehát az úgynevezett lineáris kongruenzia, az a következő fejtegetéseink nyomán szintén ki fog derülni.

Az e egyenesen át tett π sík nullpontjai a $\Gamma_a, \Gamma_b, \Gamma_c, \dots, \Gamma_t, \dots$ sugárkomplexokra nézve $P_a, P_b, P_c, \dots, P_t, \dots$ az e egyenesen egy pontsort alkotnak, mely projektív a $|T\tau|$ és $|T_1\tau_1|$ sugársorokhoz (a 6. pont utolsó tétele szerint). Ha már most az e egyenesen át egy második π' síkot teszünk, ennek nullpontjai $P'_a, P'_b, P'_c, \dots, P'_t, \dots$ szintén az e egyenesen alkotnak egy pontsort. Az e egyenesen ilykép előállott két pontsor projektív, megfelelő pontjaik a π és π' nullpontjai a vizsgált komplexsokaság ugyanazon tagjára nézve. Ennélfogva U és V duplapontjaik bármelyike π -nek és π' -nek nullpontja ugyanazon komplexra nézve. De két különböző síknak egy nullpontja valamely lineáris komplexra nézve csak úgy lehet, ha az speciális, azaz sugártengely. Tehát a vizsgált komplexsokaságban mindig van két valós, vagy konjugált képzetes $|u|$ és $|v|$ sugártengely.

A $\Gamma_a\Gamma_b\Gamma_c\dots\Gamma_t\dots$ komplexsokaság közös sugaraiból alakult első osztályú sugárkongruencia minden eleme metszi úgy az u , mint a v egyenest, tehát e kongruencia valóban elsőrendű is, azaz lineáris.

A tér tetszőleges egyenesét a $\Gamma_a\Gamma_b\Gamma_c\dots\Gamma_t\dots$ komplexsokaságnak csak egy, vagy valamennyi tagja tartalmazza: *ezen egyméretű komplexsokaság lineáris.*

Ha az l egyenes nem közös sugara ezen komplexsokaságnak, akkor a Γ_x komplexnek meghatározása, a mely az l egyenest tartalmazza, a következőleg történik. Az l egyenesen keresztül tett tetszőleges síkban van egy kongruencia-sugar, melyből az l egyenes kimetszi a sík P_x nullpontját a keresett Γ_x -re nézve. Mivel pedig a felvett síknak a vizsgált komplexekhez tartozó nullpontjai a benne levő kongruencia-sugaron oly pontsort alkotnak, mely a $|T\tau|$ és $|T_1\tau_1|$ sugársorokhoz projektív, ennélfogva a P_x pontnak e sugársorokban megfelelő x és x_1 egyenesek azon síksorok sorozói, melyek a Γ_x komplexot meghatározzák.

Ezt az eredményt még úgy is mondhatjuk, hogy a lineáris kongruencia és egy kívül levő egyenes mindig meghatároz

egy, de csakis egy lineáris komplexot. Valamint tehát a $\Gamma_a \Gamma_b \Gamma_c \dots \Gamma_t \dots$ komplexsokaság meghatározza a valamennyivel közös lineáris kongruenciát, úgy egy ily kongruencia is meghatározza az őt tartalmazó komplexsokaságot. Mivel pedig Γ_a , Γ_b komplex elégséges a közös lineáris kongruencia meghatározására, azért két komplex meghatározza az őket tartalmazó $\{\Gamma_a \Gamma_b\}$ egyméretű lineáris komplexsokaságot, melyet ezentúl röviden kompleksornak fogunk nevezni.

*

Fordítsuk meg most már a dolgot. Ha adva van $\{\Gamma_a \Gamma_b\}$ komplexsor, keressük az előbbi értelemben hozzátartozó $[T]$ és $[T_1]$ kollineár síkpontokat.

Felveszek a komplexsor egy közös sugarán két τ és τ_1 síkot, továbbá az előbbiben egy T , az utóbbiban egy T_1 pontot a $\overline{\tau\tau_1}$ metszésvonalon kívül. Legyen τ -nak nullpontja a Γ_a -ra nézve A , a Γ_b -re nézve B , ép úgy τ_1 -nek nullpontjai A' , illetőleg B' ; e pontok a $\overline{\tau\tau_1}$ egyenesen vannak.

Legyen még

$$\overline{TA} \equiv a, \quad \overline{TB} \equiv b, \quad \overline{T_1 A'} \equiv a_1, \quad T_1 B' \equiv b_1.$$

Nyilvánvaló, hogy az a és a_1 egyenesek a Γ_a , míg a b és b_1 egyenesek a Γ_b komplex sugarai. A 3. pont szerint az $[a]$ és $[a_1]$, illetőleg a $[b]$ és $[b_1]$ síksorokat oly módon hozzuk projektív vonatkozásba, hogy az előbbi pár a Γ_a , az utóbbi a Γ_b komplex sugarait messe involuczióban. Minthogy pedig az idézett pont szerint a τ és τ_1 síkok mindkét projektív síksor-párban megfelelő elemek, ezekkel a $[T]$ és $[T_1]$ síkpontok kollineációja is meg van határozva.

Már most a kollineár $[T]$ és $[T_1]$ síkpontok azon síksor-párjai, melyeknek tengelyeik a $|T\tau|$ és $|T_1\tau_1|$ megfelelő sugarai, egy komplexsort határoznak meg, melybe Γ_a és Γ_b is bele tartozik, de akkor ez utóbbi komplexsor az adottal azonos. Tekintve, hogy τ sík a tér bármely síkja lehet és benne a T pont ∞^2 -féleképp választható és az e szerint ∞^5 -féleképp

választható $|T\tau|$ sugársorhoz a T_1 még ∞^8 -féleképp vehető föl, míg a T , τ és T_1 már meghatározza a τ_1 -et, világos, hogy a megadott lineáris kongruenciához ∞^8 számú kollineár sikk-pont-pár szerkeszthető, melyek mindegyikének egyszerűen végtelen sok megfelelő sikk-párja metszi az adott kongruencia minden sugarát involúcióban.

★

Visszatérve a kongruencia és vele kapcsolatos komplexsor vizsgálatára kiemeljük, hogy az u és v kongruencia-tengelyek — mint egyszerűen igazolható — megfelelő egyenesek a kapcsolatos komplexsor tagjai által meghatározott nullszisztémákra nézve.

A lineáris kongruenciát a két tengely teljesen meghatározza. Minthogy pedig négy egyenesnek, mely nem tartozik egy hiperboloid alkotósorába, mindig van két valós vagy képzetes transversalisa, következik, hogy a lineáris kongruenciát négy sugara általában meghatározza.

A lineáris kongruencia, melynek négy általános helyzetű sugara egy lineáris komplexbe tartozik, teljesen bele tartozik e komplexbe és tengelyei megfelelő egyenesek a komplexszel adott nullszisztémára nézve. Megfordítva is, ha két egyenes egymásnak megfelel egy nullszisztémára nézve, úgy a transversalisaikból alakult kongruencia teljesen bele tartozik a nullszisztémával adott lineáris komplexbe.

Specziális kongruenciát alkotnak a lineáris komplex azon sugarai, melyek egy komplexsugárt metszenek. Ennek két tengelye összeesik. Ha a komplextől függetlenül akarunk ily kongruenciát meghatározni, úgy a tengelyen levő sikkort és pontsort projektív vonatkozásba hozzuk és a kongruenciába sorozzuk azon sugarakat, melyek a tengely bármely síkjában a megfelelő ponton áthaladnak.

Egy komplexbe tartozó két lineáris kongruencia közös sugarai egy hiperboloid egyik rendszerbeli összes alkotói; mert a nullszisztéma két megfelelő egyenes párja oly hiperboloid négy vezérvonala, melynek minden alkotója nullsugar.

Ha pedig két lineáris kongruencia nem tartozik egy lineáris komplexbe, akkor csak két közös sugaruk van t. i. a két pártengely két valós, vagy konjugált képzetes transversalisa.

Végül, ha egy lineáris kongruencia és egy hiperboloid alkotósora — hiperbolikus sugársor — ugyanazon lineáris komplexbe tartozik, úgy van két közös sugaruk, még pedig a hiperbolikus sugársor azon két eleme, mely a kongruencia egyik tengelyét metszi. Ugyanis e két sugár nullsugár lévén, metszi a kongruencia-tengelynek a nullszisztémában megfelelő egyenest, tehát a másik tengelyt is.

8. Kétméretű lineáris kompleksokaság.

A kollineár $[T]$ és $[T_1]$ síkpontok megfelelő síksoraihoz tartozó lineáris komplexek általánosságban egy kétszeresen végtelen nagy sokaságot alkotnak, melyet $\{TT_1\}^n$ -vel jelölünk.

Ezen sokaság lineáris. Ugyanis e sokaságba tartozó Γ_a és Γ_b komplex az előbbi pont szerint meghatároz egy komplexsort, melynek minden tagja bele tartozik a $\{TT_1\}^n$ sokaságba.

A tér egy tetszőleges e egyenesét tartalmazó komplexek szintén egy komplexsort alkotnak.

A $\{TT_1\}^n$ sokaságba tartozó két komplexsor mindig tartalmaz egy, de csakis egy közös komplexet. Mert a $\{\Gamma_a\Gamma_b\}$ komplexsorhoz tartozó $|T\tau|$ és $|T_1\tau_1|$ sugársorok a $\{\Gamma_c\Gamma_d\}$ komplexsorhoz tartozó $|Tv|$ és $|T_1v_1|$ sugársorokkal egy-egy megfelelő sugárt tartalmaznak közösen.

Keressük e kétméretű komplexsokaság közös sugarait.

Ha g egy ily közös sugár, akkor a $[T]$ és $[T_1]$ összes síksor-párjai ezt involúcióban metszik. Tehát a g -n áthaladó π sík a két síkpontból oly egyesített kollineár síkokat metsz ki, melyeknek g egyenesét az összes sugársor-párok involúcióban metszik.

Ez azonban csak úgy lehet, ha e síkok kollineációjára involúció vagy félinvolúció.

Ha involúció volna, úgy volna egy egyenes — az involúció tengelye — melynek minden pontja önönmagának felelne meg,

a mi a $[T]$ -re és $[T_1]$ -re átvive annyit tesz, hogy e két kollineár síkpont képződménye, a k^3 harmadrendű görbe szétesik alsóbb rendűekre, a mely esetben a $[T]$ és $[T_1]$ kollineációját nem tekintjük általános jellegűnek, tehát jelen vizsgálatainkból ezen esetet egyelőre kizárjuk.

Általánosságban tehát csak a második eset lehetséges t. i., hogy a g egyenesen át tett π sík félinvoluczióban metszi a $[T]$ és $[T_1]$ síkpontokat, melynek tengelye a g . Ebből már most következik, hogy minden közös g egyenesben a $[T]$ és $[T_1]$ két megfelelő síkja γ , γ_1 találkozik; továbbá a $|T\gamma|$ és $|T_1\gamma|$ sugársorok a g -t involuczióban metszik, minélfogva a $[T]$ és $[T_1]$ bármely síkpárja ugyanazon involuczió egy párjában metszi a g -t; végül g a k^3 görbe egy húrja. Legyen a π -ben levő félinvoluczió centruma G ; akkor a \overline{TG} és $\overline{T_1G}$ megfelelő egyenesek és a $[TG]$ és $[T_1G]$ megfelelő síksorokat a π involuczióban metszi, mi csak úgy lehet, ha a $[TT_1G]$ síknak a két különböző értelemben megfelelő síkok u metszésvonala a π síkban van. Ez az u egyenes, a mely a $\{TT_1\}^u$ sokaságba tartozó egy specziális komplexnek tengelye, szelője (secans) a k^3 harmadrendű görbének.

Ha már most a π sík a g körül forog, úgy a $[TT_1G]$ sík leírja a $[TT_1]$ síksort és a neki $[T_1]$ -ben megfelelő sík a $[p_1]$, a $[T]$ -ben megfelelő sík pedig a $[q]$ síksort. A $[p_1]$ és $[q]$ síksorok projektívek és két-két megfelelő síkjuk metszésvonala a $\{TT_1\}^u$ komplexsokaság egy-egy specziális komplexének tengelye, ennélfogva e tengelyek egy H hiperboloid egyik sugársorát, mondjuk, vezérvonal-sorát alkotják.

Ha most még π sík az $[u]$ síksort írja le, akkor is minden helyzetében félinvoluczióban metszi a $[T]$ és $[T_1]$ kollineár síkpontokat. A félinvoluczió centruma ugyanaz a G pont marad, míg tengelye, a g egyenes, minthogy a $[T]$ és $[T_1]$ összes síksor-párjait involuczióban metszi, egyszersmind metszi az összes specziális komplexek tengelyeit is, tehát leírja a H alkotó sorát. Egyszersmind, mivel $[Tg]$ és $[T_1g]$ megfelelő síkok, ezek két megfelelő $[r]$ és $[r_1]$ síksort írnak le.

Ha két kollineár $[T]$ és $[T_1]$ síkpont képződménye nem degeneráló k^3 harmadrendű görbe, úgy megfelelő síksor-párjaik egy $\{TT_1\}^n$ lineáris kétméretű komplexsokaság tagjait határozzák meg. Ezek közös sugarai egy hiperboloid összes alkotói, melynek minden vezérvonala a komplexsokaság egy specziális komplexének tengelye.

A közös sugarak a k^3 harmadrendű görbét két pontban metszik, melyek duplapontjai azon involúciónak, melyben a közös sugarak az összes síksor-párokat metszik; a T és T_1 ponton áthaladó ily közös sugarak érintői a k^3 görbének.

A specziális komplexek tengelyei egy-egy pontban metszik a k^3 görbét és az a kettő, mely a T és T_1 ponton áthalad, megfelelő egyenes pár a $[T]$ és $[T_1]$ síkpontok közt fennálló kollineációban.

Ha még ezen eredményeket a kapcsolatos komplexekre való tekintet nélkül mondjuk ki, úgy oly tételt nyerünk, mely az 1. pontban talált tételek analogonjának tekinthető.

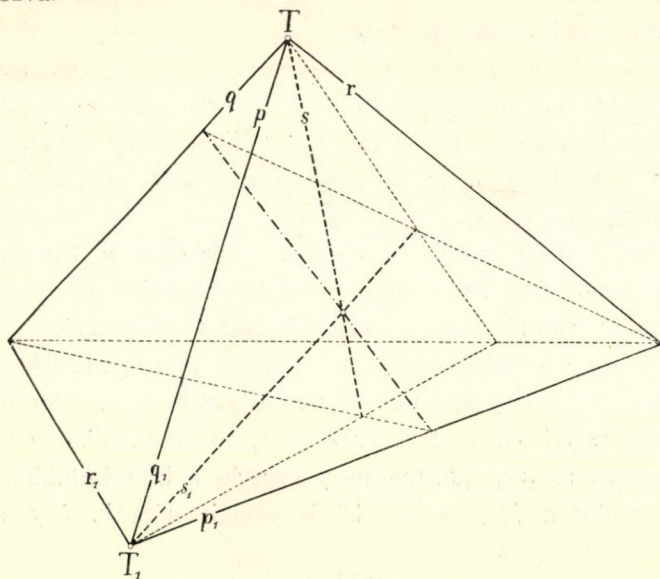
Ha két síkpont kollineációja általános jellegű, úgy összes síksor-párjait involúcióban metsző egyenesek egy hiperboloid alkotó sorát teszik ki, melybe bele tartozik a közös egyenesnek a két különböző értelemben megfelelő egyenes. E hiperboloid minden egyes vezérvonalában a két síkpont egy közös síkjának mindkét értelemben megfelelő két sík találkozik.

Visszatérve a $\{TT_1\}^n$ lineáris kétméretű komplexsokaságra, könnyen belátható, hogy ez a közös hiperboloiddal teljesen meg van határozva.

A komplexsokaság minden tagja tartalmazza ezen hiperboloid alkotó sorát, míg vezérvonalai az illető komplexszel adott nullszisztémában megfelelő egyenesek és mint ilyenek involúciót alkotnak. Minden komplexnek más involúció felel meg és megfordítva: minden involúcióval más-más komplex van meghatározva. Ha ugyanis egy ily involúció adva van és két a hiperboloidon kívül eső egyenest veszünk, melyek mindenike az involutorius vezérvonal-sor egy-egy párját metszi, úgy ezek a hiperboloid három alkotójával a komplex meg-

határozására szükséges és elégséges öt egyenest szolgáltatnak.

Minthogy pedig a vezérvonal-sor kétszeresen végtelen sok involuczióba sorozható, világos, hogy a kétméretű lineáris komplexsokaság a közös hiperboloiddal teljesen meg van határozva.



3. ábra.

Azon involucziók, melyek egy közös valós, vagy konjugált képzetes elempárt tartalmaznak, egy komplexsort határoznak meg.

De bármikép legyen is a kétméretű lineáris komplexsokaság meghatározva: kérdés, lehetséges-e oly kollineár $[T]$ és $[T_1]$ síkpontokat találni, melyeknek megfelelő síksor-párjai az adott sokaság komplexeit határozzák meg?

Ha van két ily síkpont, úgy azok T és T_1 sorozója az előzmények szerint a közös hiperboloidon van.

Tehát első sorban ismernünk kell a közös sugarak hiperboloidját. Ez nem mindig reális, de jelen tárgyalásunkban felteszszük, hogy reális és nem degenerált.

Vegyük most már e hiperboloid két T és T_1 pontját úgy, hogy a $\overline{TT_1}$ egyenes ne legyen se alkotója, se vezérvonala a hiperboloidnak és nevezzük ezt p -nek, illetőleg q_1 -nek a szerint, a mint a $[T]$ -hez, vagy $[T_1]$ -hez sorozzuk.

Nevezzük továbbá a T , ill. T_1 ponton áthaladó alkotót (közös sugarat) q -nek, ill. p_1 -nek és e pontokon áthaladó vezérvonalakat r -nek, ill. r_1 -nek.

Ha még felveszünk e síkpontokban oly s és s_1 egyeneseket, melyeknek (ss_1) metszéspontjuk a hiperboloidra esik, úgy e négy pár egyenessel a $[T]$ és $[T_1]$ kollineációját meghatározhatjuk úgy, hogy a p, q, r, s egyeneseknek sorjában megfeleljen p_1, q_1, r_1, s_1 .

Ha már most r -ből és r_1 -ből projicziáljuk a hiperboloid alkotó sorát, úgy az $[r]$ és $[r_1]$ síksor projektív és megfelelő alakzat az előbbi módon megállapított kollineációban. Mert $[rp]$ és $[r_1p_1]$ metszéspontja p_1 , $[rq]$ és $[r_1q_1]$ metszéspontja q , végre $[rs]$ és $[r_1s_1]$ metszéspontja szintén a hiperboloid alkotója, mivel ez metszi az r és r_1 vezérvonalakat és még tartalmazza az (ss_1) pontot, mely szintén a hiperboloidon van.

Ha pedig a $[T]$ és $[T_1]$ közös síkjait nézzük, úgy látjuk, hogy

$$[pq] \equiv [q_1r_1],$$

$$[pr] \equiv [q_1p_1],$$

$$[ps] \equiv [q_1s_1].$$

Így e három síknak a két különböző értelemben megfelelő síkpárok metszéspontjai:

$$[p_1q_1] [qr] \equiv r,$$

$$[p_1r_1] [qp] \equiv r_1,$$

$$[p_1s_1] [qs] \equiv (ss_1)p_1q,$$

az adott hiperboloid vezérvonalai és így bármely közös síknak a két különböző értelemben megfelelő két sík az adott hiperboloid egy vezérvonalában metszi egymást.

Sikerült tehát a $[T]$ és $[T_1]$ síkpontokat olyképp kollinearvonatkozásba hozni, hogy e kollineációval együtt meghatáro-

zott $\{TT_1\}^n$ kétméretű lineáris komplexsokaság közös sugarai és speciális komplexei az eredetileg adott komplexsokaság közös sugaraival, illetőleg speciális komplexeivel azonosak, vagyis az adott és a $\{TT_1\}^n$ lineáris kétméretű komplexsokaság azonos.

Láttuk, hogy a $[T]$ és $[T_1]$ síkpontok kívánt kollineációja az (ss_1) pont felvételével meg volt határozva, de ezzel egyszerűsmind egy k^3 harmadrendű görbe is meg van adva, melynek bármely pontját veszem (ss_1) -nek a $[T]$ és $[T_1]$ kollineációja ugyanaz marad. Tehát jóllehet az (ss_1) pont ∞^2 -féleképp választható a közös hiperboloidon, a $[T]$ és $[T_1]$ ilykép meghatározott kollineációja egyszerűen végtelen sokféle. Ezt az egyszerűen végtelen sok kollineációt, még pedig mindeniket csak egyszer megkapjuk, ha az (ss_1) pont a közös hiperboloid egy vezérvonalát befutja.

Végül a T, T_1 pontpár ∞^4 -féleképp lévén választható, ∞^5 kollineár síkpontpár van, mely ugyanazt a $\{TT_1\}^n$ kétméretű lineáris komplexsokaságot határozza meg.

Mielőtt még a kivételes és speciális esetekre áttérnénk, kimutatjuk, hogy

a kétméretű lineáris komplexsokaságot három komplexe, mely nem tartozik ugyanazon komplexsorba, teljesen meghatározza.

Azt mutatjuk ki, hogy e három $\Gamma_a, \Gamma_b, \Gamma_c$ komplex már meghatározza a közös sugarak hiperboloidját és ezzel együtt az egész sokaságot.

Legyen a $\{\Gamma_a\Gamma_b\}$ komplexsor két speciális komplexének tengelye u, u' és a $\{\Gamma_a\Gamma_c\}$ komplexsor két speciális komplexének tengelye v, v' .

E négy egyenes egy hiperboloid négy vezérvonala, mert a Γ_a -hoz tartozó nullszisztémában az u, u' és v, v' megfelelő sugárpárok. De e hiperboloid a keresett közös hiperboloid, mert alkotói mind a három komplexbe bele tartoznak. A közös hiperboloid pedig, mint láttuk, teljesen meghatározza a kétméretű lineáris komplexsokaságot.

Minthogy ez esetben az (e) és (e_{-1}) pontsorok is perspektivék a C centrumra nézve, az $A_{-1}(e)$ és $A(e_{-1})$ perspektív sugársorok képződménye s harmonikusan választja el az e és e_{-1} egyenest a C centrumtól. Miből pedig következik, hogy, ha a σ és σ_1 kollineációja involutorius, úgy bármely nem önönmagának megfelelő e egyenest involuczióban metsző sugársor-párok geometriai helye az involuczió c tengelye.

Ha e önönmagának megfelelő, úgy az általános perspektivitás esetében a keresett s és s_1 magával az e -vel esik össze.

Ellenben az involuczió esetében a centrumon áthaladó összes egyenesek kivételesek, mert ezeket bármely sugársor-pár involuczióban metszi.

Skopál István.

A ZEEMAN-FÉLE JELENSÉGRE VONATKOZÓ ÚJABB VIZSGÁLATOKRÓL.¹

A ZEEMAN-féle jelenségre vonatkozó ismereteink újabban nagy lépéssel haladtak előre.

PASCHEN és BACK,² továbbá EROCHIN³ rendkívül értékes vizsgálatai ugyanis azt igazolták, hogy a ZEEMAN-féle jelenségben *anomáliák* nincsenek, hanem az, a mit mindeddig annak tartottak egy általános oknak a következménye. A látszólagos anomális típusok ugyanis a mágneses erőter intenzitásának növelésével megszűnnek, az eredeti spektrumvonalak eltűnnek és helyükbe újak lépnek; melyek ZEEMAN-féle effektusa az erőter intenzitásának fokozásával mind jobban és jobban megközelíti a LORENTZ-féle elméletnek megfelelő *normális* tripletet.

E rendkívül érdekes eredményeket és a jelenség VOIGT-féle⁴ elméletének körvonalait óhajtom a következőkben ismertetni.

A ZEEMAN-féle jelenség igen változatos típusai és a színeképszeriések között PRESTON állított fel bizonyos törvényszerűséget. E PRESTON-féle törvény azt fejezi ki, hogy *az egy és ugyanazon sorba csoportosuló színeképvonalak ugyanazon mágneses erőterben qualitative és quantitative* (a rezgésszámban kifejezve) *teljesen egyformán bomlanak komponensekre, továbbá hogy e törvényszerűség a különböző elemek egymásnak megfelelő sorjaisére nézve is érvényes.*

¹ A régebbi vizsgálatok eredményeinek ismertetését lásd: MIKOLA S.: Math. Phys. Lapok 9. 76. l. (1900) és RYBÁR I., Math. Phys. Lapok 20. 128. l. (1911) dolgozataiban.

² F. PASCHEN és E. BACK: Ann. d. Phys. (4) 39. 897. l. (1912).

³ P. EROCHIN: Ann. d. Phys. (4) 42. 1054. l. (1913).

⁴ W. VOIGT: Ann. d. Phys. (4) 40. 368. l. (1913), és (4) 41. 403. l. (1913).

E törvény érvényességét különösen RUNGE és PASCHEN¹ számos szeriesre nézve igazolták. Újabban azonban több szeriest ismertek fel, melyek vonalai a PRESTON-féle törvény által követelt típusoktól *teljesen eltérően* bomlanak komponensekre. Ezen anomáliának igen szembetűnő példáját a *hélium* spektruma nyújtja, melynek vonalai tudvalevőleg a leghatározottabb szeriesbe csoportosulnak, de a PRESTON-féle törvénynek egyáltalában véve nem tesznek eleget.² Tapasztalat igazolta, hogy ezen anomália csakis a *dublet* és a *triplet*-szerieseknél, tehát azon szerieseknél észlelhető, melyek két, illetve hármas vonalból összetettek; ellenben az egyszerű vonalak szeriesei a PRESTON-féle törvénynek hódolnak. Az utóbbi szeriesek tagjai a LORENTZ-féle elméletnek megfelelően bomlanak összetevőkre.

E tapasztalatok készítették PASCHEN-t, a szinképvonalak fáradhatatlan kutatóját arra, hogy beható kísérleti vizsgálatok tárgyává tegye ezen anomáliát mutató dublet és triplet szeriesek vonalainak komponensekre való bomlását különböző intenzitású mágneses erőter alkalmazásánál.

PASCHEN kísérleti vizsgálatainál fontos volt nagy közben változtatható mágneses erőter alkalmazása. Ezért az ily vizsgálatokhoz rendesen használatos elektromágnest, melynek pólusai a GEISSLER-csőnek elhelyezése céljából, a mágneses erőter irányában voltak kifúrva, nem használhatta. A GEISSLER-csövet a pólusok között az erővonalakra merőlegesen helyezte el. Ennek ismét az volt a hátránya, hogy, mivel a mágneses erőter a finom világító fénynyalábot a cső falához szorította, az üvegből készült GEISSLER-cső rendkívül felmelegedett, átlátszatlan lett, sőt meg is olvadt. Egyedül kvarczüvegből készített GEISSLER-csövet használhatott sikerrel, azt is azonban csak úgy, hogy a hosszú ideig (egészen 1 óráig) tartó expozíció közben azt több ízben újjal cserélte ki. Egy KLINGELFUSS-féle induktorium szolgáltatta a kívánt nagy feszültséggel a secundár áramot, mely

¹ Sitzungsberichte d. königl. preus. Ak. 308—386, 720—730. I. Berlin, 1902.

² Phys. Zeitschrift 9. 145. I. (1908).

a GEISSLER-csővet tündöklő világításba hozta. A megfigyelések nagy ROWLAND-rácssal fotografikus úton történtek.

A mágneses erőter intenzitását PASCHEN a higany színkép-vonalaival, melynek a különböző intenzitású mágneses erőterben való viselkedése ismeretes, határozta meg. E célból a GEISSLER-csőbe a megvizsgálandó gázba egy kevés Hg gőzt juttatott, miáltal a gáz spektrumával együtt a Hg spektruma is megjelent.

PASCHEN vizsgálatait az *oxigén*, *hélium* és *hidrogén* dublet és triplet szeriesekre terjesztette ki.

Az *oxigén* triplet szeriesének második tagjai a 3947·438, 3947·626, 3947·731¹ vonalak 6000 Gauss-nál kisebb erőtérnél egymástól teljesen függetlenül bomlanak fel. Mihelyt azonban az egyes vonalak komponensei egymást keresztezik, a mi 6000 Gauss erőtérnél megtörténik, a ZEEMAN-féle típusok átalakulása megkezdődik. Ezen átalakulás különösen szembetűnően megy végbe akkor, a mikor a szélső komponensek már a szomszédos vonal középső komponensére esnek. Az eredeti színkép-triplet közép helyén egy nagy intenzitású komponens keletkezik, mely eleinte teljesen határozatlan polározási állapotú, a mely azonban az erőter intenzitásának növelésével mindinkább határozottabb s végül 32,000 Gaussnál már teljesen határozott lesz; e komponens ekkor az erővonalakra merőlegesen polározott.

A szélső, az erővonalakkal párhuzamosan polározott komponensek 20,000 Gaussnál egy-egy diffúz vonallá egyesülnek. E diffúz vonalak növekvő intenzitású erőterben keskenyednek és az előbbi középső komponenssel együtt a *normális* triplet-hez közelednek.

PASCHEN következő vizsgálata a *hélium* fentemlitett anomáliájára vonatkozott. Ismeretes, hogy a *He* spektrumban egyes vonalak közvetlen közelében egy-egy gyenge vonal, az úgyneve-

¹ A színképvonalak hullámhossza 10^{-8} cm-ben, azaz Ångström-egységben van megadva.

zett *kisérővonal* észlelhető. PASCHEN vizsgálatai szerint e kísérővonalak okozzák a fenti anomáliát. Ugyanis a míg az egyszerű *He* vonalak normális tripletre bomlanak, addig azon vonalak, amelyeknek ily kísérői vannak, csak kis erőtérenél adnak normális tripletet. Mihelyt az erőtér oly nagy lesz, hogy a kísérővonal és a fővonal komponensei egymásra érnek, akkor a ZEEMAN-féle típus átalakulása megkezdődik.

A hidrogén H_α H_β H_γ vonalai, melyek tudvalevőleg kettős vonalak, kis intenzitású erőtérben anomális tripletre bomlanak: a komponensek intenzitása anomális és a középső komponens határozatlan polározású. Ezen anomália az erőtér növelésével kisebbedik, de még 32,000 Gaussnál sem tűnik el teljesen.

PASCHEN e dolgozatához csatolt függelékben BACK a *lithium*, a *kálium* és a *nátrium* egyes vonalainak ZEEMAN-effektusára vonatkozó vizsgálatait közli.

A *lithium* főszerieséhez tartozó 6708·20 és 3232·77, az I-ső mellékszerieséhez tartozó 6103·77 és 4603·04, továbbá a II-ik mellékszeries 4971·98 vonalai *normális* tripletre bomlanak. Miután a lithiummal rokon főszeriesének egyik tagja, a *D* vonal, kettős vonalból áll, ezért a PRESTON-féle törvény értelmében kell, hogy a 6708·20 és 3232·77 lithiumvonalak szintén két vonalból összetettek és ZEEMAN effektusuk a D_1 és a D_2 vonalak típusaiból (quadruplet- és sextuplet-ből) álljon. Ezek azonban a két vonal közelsége miatt már kis erőtérenél is normális triplet-té alakultak át.

A *kálium* főszeriesének 4044 és 4047 vonala a *D* vonallal minőség- és mennyiségre teljesen megegyezik.

Különösen érdekesek azok a vizsgálatok, amelyek a *nátrium* főszeriesének viselkedésére vonatkoznak. E főszeriesben a D_1 és D_2 után következő 3303·07 és 3302·47 vonalak ZEEMAN-effektusukban csakis intenzitáseloszlásban térnek el a D_1 és D_2 vonalak típusaitól. Nem lehetetlen, hogy a mágneses erőtérenek átalakító befolyása már itt megkezdődik. A főszeries következő tagja 2852. E helyen a két vonalnak oly közel kell egymáshoz

lennie, hogy szétválasztásukat remélni se lehet. A mágneses erőter befolyása nyilvánul: *e vonal tripletre bomlik.*

PASCHEN és BACK ezen vizsgálataival egyidőben kisebb erőternél EROCHIN végzett hasonló vizsgálatot a *hidrogén H_α vonalával*. A Geissler-csövet az erővonalakkal párhuzamosan helyezte el. A spektrumot LUMMER-féle lemezzel állította elő és a vonalak intenzitás elosztását HARTMANN-féle mikro-fotometerrel vizsgálta. Eredménye megegyezik a PASCHEN-féle vizsgálatok eredményével.

E jelenségeknek elméletét VOIGT fejtette ki.

A VOIGT-féle elmélet közvetlenül csak az abszorpcziós ZEEMAN-féle jelenségre érvényes, de — az abszorpczió és az emisszió közötti kölcsönösség alapján — az emissziós ZEEMAN-féle jelenségre is kiterjeszthető.

Az egyszerű ZEEMAN-féle jelenségnek, a normális tripletnek VOIGT-féle elméletét már ismertettem.¹ Ez elmélet lényege a következő:

A diszperzióelmélet értelmében a fény továbbítását anyagi közegekben rezgő elektronok okozzák. Ezen elektronokat egy quasi elasztikus erő köti a test molekuláihoz, továbbá az elektronok még egy csillapító erő hatása alatt is állanak. E két erő az elektronokat rezgésre kényszeríti. E rezgés szaporasága az elektron önrezgésének szaporasága.

Ha a fényforrás mágneses erőterben van, akkor az elektronokra a különben működő erőkön kívül még egy elektromágneses erő is hat, mely az elektronok rezgésének szaporaságát megváltoztatja. S ha feltesszük, hogy az elnyelő közegre eső fényrezgések (elektromágneses hullámok között olyan is van, melynek a szaporasága az elektron önrezgése szaporaságával közel egyenlő, akkor a VOIGT-féle elmélet arra vezet, hogy azon elektron rezgése három különböző szaporaságú rezgésből van összetéve, úgy, hogy az erővonalra merőleges irányban a normális triplet keletkezik.

VOIGT ez elméletében csak azt a feltételt vezette be, hogy

¹ RYBÁR I.; Math. Phys. Lapok. 20. 141. l. (1911.)

az elektronok egymásra semminemű hatást sem fejtenek ki s hogy csak egyetlen egy oly elektron van, melynek rezgése ön-rezgésével közel egyenlő periodusban ismétlődik. E feltétel annyit jelent, hogy az illető szinképvonal közelségében más szinképvonal nincs s hogy e vonalak annyira távol vannak egymástól, hogy egymásra kölcsönös hatást nem gyakorlanak.

PASCHEN, BACK és EROCHIN észlelése szerint az egyszerű vonalak tényleg normális tripletre bomlanak, az anomália csak ott tapasztalható, a hol az illető szinképvonal közelében más vonal is van. A mágneses erőter átalakító hatása annál nagyobb, minél közelebb vannak e vonalak egymáshoz.

E jelenségek magyarázatára VOIGT felteszi, hogy a közel egyenlő szaporaságu elektronok erőt fejtenek ki egymásra, úgy hogy az elektronok kényszermozgást végeznek, VOIGT e kényszererőket kifejezi, s így épen az elektronok mozgásegyenletének felállítása képezi a VOIGT-féle elmélet alapját.

Az egymásra hatást gyakorló — az összekapcsolt — elektronok száma az összetett szinképvonal alkotó vonalainak számától és a vonalak ZEEMAN-féle típusától függ.

Láttuk, hogy a H_α vonal két vonalból áll. E vonalak mindegyike kis erőterben a legnagyobb valószínűséggel tripletre bomlik. Erre enged következtetni a PRESTON-féle törvény alapján e vonal seriesjellege. De a mágneses triplet magyarázatára csak egy elektron felvétele szükséges, s ezért a H_α vonal különös viselkedésének magyarázatára VOIGT csak két egymással összekapcsolt elektront vesz fel.

VOIGT kimutatja, hogy a kölcsönhatás paramétereinek alkalmas megválasztásával a mágneses erőternek a H_α vonalon észlelt átalakító hatása teljesen magyarázható.

A D vonal viselkedésének magyarázatára három egymásra erőt kifejtő elektront kell bevezetni, s a parametereket alkalmas módon megválasztani.

A rendelkezésemre álló hely az általános VOIGT-féle elméletnek csak valamivel részletesebb ismertetését sem engedi meg.

Rybár István.

A FÉNYSEBESSÉG VÁLTOZÁSÁNAK SZEREPE ASZTRONÓMIAI JELENSÉGEKNÉL.

Az a feltevés, hogy a fény terjedési sebessége a fényforrás sebességétől függ, a spektroszkópiai kettős csillagok mozgásának vizsgálatánál igen fontos. Ezen, az utóbbi évtizedekben felfedezett és alaposan átkutatott kettős rendszereknek mozgását csakis spektrumuk vizsgálatából ismerjük, a mennyiben az itt észlelt vonaleltolódások DOPPLER elve alapján az illető égitest radiális sebességére engednek következtetni. Az ily esetekben észlelhető elég tetemes és e mellett rövid periodusú sebesség-változások nagyon alkalmasak arra, hogy a fény terjedésére vonatkozó ezen feltevéseket kritikailag megvizsgálhassuk. Újabban DE SITTER, FREUNDLICH és GUTHNICK¹ behatóan foglalkoztak ezzel a kérdéssel; eredményeik ismertetése végett legcélszerűbb a spektroszkópiai kettős csillagok pályaszámításának alap-egyenleteiből kiindulni.

A csillagpár fényes P componensének mozgását egy a mozgó rendszer G tömegközéppontján átfektetett alapsíkra vonatkoztatjuk, melynek normálisa a Z tengely s ennek negatív iránya az észlelőhelyen megy keresztül, az X tengely pozitív iránya az elliptikus pálya felszálló csomóvonala, az Y erre merőleges. Egyébként az X iránya a térben, tehát pl. az æquatoriális koordinátarendszerben teljesen határozatlan marad, mert csak a z koordináta változása észlelhető. Jelölje továbbá a a pálya

¹ DE SITTER : Phys. Ztschr. XIV. 429. l. és XIV. 1267. l. FREUNDLICH : Phys. Ztschr. XIV. 835. l. (1913.) GUTHNICK : Astronomische Nachrichten 195 265. l. (1913.)

nagy tengelyét, i a pályasík hajlásszögét, ω a periasztron hosszát, t. i. a $PG = r$ radius vector szögét a poz. X tengelylyel abban a pillanatban, midőn r minimum, e szöget a mozgás irányában számítva, e a pályae ellipszis excentricitását, v a valódi anomáliát, akkor a:

$$z = r \sin i \sin (v + \omega) \quad (1)$$

egyenlet idő szerinti differenciálása útján egyszerűen következik, hogy az észlelés egyedüli tárgya, a radiális sebesség:

$$\rho = \frac{dz}{dt} = \frac{na \sin i}{\sqrt{1-e^2}} [\cos (v + \omega) + e \cos \omega], \quad (2)$$

hol n a közép napi mozgás, mely a T keringési időből könnyen kiszámítható. Itt egyszerűség okából feltesszük, — mi a következőkre lényegtelen megszorítás — hogy a G tömegközéppont radiális sebessége zérus. A ρ radiális sebesség spektroszkópiai úton le mért kellő számú értékéből megszerkeszthető az ú. n. sebességi görbe, ha ρ -t mint ordinátát t -hez, mint abszcisszához felrakjuk. Ez a szinuszvonalhoz hasonló görbe az észlelések kiegyenlítésénél és a pályaelemek meghatározásánál igen nagy szerepet játszik és az ily célú módszereknek alapjául szolgál. Itt nem részletezendő módon¹ a ρ -értékek sorozatából 5 pályaelem:

$$a \sin i, n, e, \tau \text{ és } \omega$$

határozható meg, hol τ a periasztron-átmenet ideje. a és i csak a fentebbi kapcsolatban szerepelvén, külön-külön nem számíthatók ki. T -t már a sebességi görbe szerkesztésekor állapíthatjuk meg a többi elemektől függetlenül.

Tekintettel a következőkre fejtsük ki (2) jobb oldalát e hat-

¹ L. pl. LEHMANN-FILHES cikkét: Astr. Nachr. 136. k. 17. l. (1894) vagy SEELIGER cikkét a VALENTINER: Handwörterbuch d. Astronomie I. kötetében 690. l. (1897).

ványai szerint, ha $M = n(t - \tau)$ a közép anomália és: $M + \omega = l$ a középhossz, akkor ismert formulák szerint lesz:

$$\rho = K \cos [l + 2e \sin(l - \omega) + \frac{5}{4}e^2 \sin 2(l - \omega) + \dots] + Ke \cos \omega, \quad (3)$$

hol K a ρ -ban szereplő állandó tényező.

Ha most már a fény terjedési sebessége nem állandó, hanem a fényforrás sebességétől függ, ez a befolyás, még ha igen kicsiny is, nagy mértékben módosíthatja az észlelt radiális sebességet. DE SITTER RITZ nyomán felteszi, hogy a fény sebessége a nyugvó fényforrásnál észlelt c sebességnek és a fényforrás u radiális sebességének algebrai összege, u -t pozitívnak véve, ha a fényforrás közeledik. Ez volna a sebesség törvénye pl. a fény emisszió-elméletében. Ezen egyszerű feltevéstől egyelőre eltekintve, a kapcsolatot a fénysebesség és u között általánosabban GUTHNICK nyomán úgy fogalmazzuk, hogy a fénysebesség: $c - f(u) \cos \varepsilon$ -nal legyen egyenlő, hol $f(u)$ a fényforrás eredő sebességének (nem radiális componensének) ismeretlen, u -val kisebbedő függvénye, ε u szöge a látóvonal irányával, tehát $f(u) \cos \varepsilon$ pozitív, ha u -nak radiális componense az észlelő felé irányul. Ez a tag mindenesetre igen kicsiny c -hez képest és u -val eltűnik.

Vizsgáljuk meg ezek alapján egy Δ távolságban u egyenletes sebességgel körpályában mozgó csillag radiális sebességét, ha a látóvonal a pálya síkjában fekszik. Igen közelről észlelve volna:

$$\rho = u \cos l,$$

ha ismét l a középhossz a felszálló csomótól számítva. A mozgást Δ távolságból észlelve, ennek bizonyos t időben bekövetkező fázisát $t + \frac{\Delta}{c}$ időpillanatban észlelnők, ha c független volna u -tól, mivel azonban ezen esetben $\varepsilon = l$, tehát a fentebbi feltevések szerint a fény $t + \frac{\Delta}{c - f(u) \cos l}$ időpillanatban ér hozzánk. De az előbbi fáziseltolódás állandó lévén, észlelés útján nem állapítható meg, hanem csak a két fáziskésés különbsége:

$$\frac{\Delta}{c - f(u) \cos l} - \frac{\Delta}{c} = \frac{\Delta f(u) \cos l}{c^2 \left(1 - \frac{f(u) \cos l}{c}\right)}$$

jön tekintetbe. Ezt kell az észlelés idejéből levonni, hogy a valódi fázis megállapítására mérvadó időt megkapjuk, lesz tehát a radiális sebesség:

$$\rho = u \cos \left(l - \mu \frac{\Delta}{c^2} \frac{f(u) \cos l}{1 - \frac{f(u) \cos l}{c}} \right) \quad (4)$$

az $f(u)$ -val szorzott kis tagot sorba fejtvé, elegendő pontossággal nyerjük, hogy:

$$\rho = u \cos \left[l - \mu \frac{\Delta}{c^2} f(u) \cos l \right] = u \cos (l - k \cos l), \quad (5)$$

hol rövidség kedvéért

$$k = \frac{\mu \Delta}{c^2} f(u) \quad (6)$$

és μ a másodpercenkénti középmozgás: $n : 86400$.

Az (5) egyenletet most már a (3) egyenlettel összehasonlítva, közvetlenül világos, hogy ha (3)-ban az e elsőnél magasabb hatványaitól függő tagokat elhanyagoljuk, a két egyenlet azonosná válik, ha még:

$$n = u; \quad \omega = 90^\circ; \quad e = \frac{1}{2} k.$$

Vagyis végeredményben a fénysebességre vonatkozó fentebb részletezett feltevés a körpályában mozgó test radiális sebességére oly befolyást gyakorol, hogy ennek következtében az égitest sebessége olyan törvényt látszik követni, mintha a pálya $\frac{1}{2} k$ excentricitású ellipszis volna, a fénysebességet e mellett állandónak tételezve fel. (6)-ból következik, hogy k annál nagyobb, minél nagyobb a Δ távolság, az u pályamenti sebesség és a μ középmozgás. GUTHNICK az ily körülmények között észlelhető sebességi görbéket ezen jellemző állandók különböző választása mellett megszerkesztette és arra a következtetésre jut, hogy míg $u = 100$ km/sec sebességnél sem lenne

könnyű az így fellépő látszólagos elliptikus mozgást a valóban elliptikus mozgástól megkülönböztetni, a míg e kis érték, mert a (3)-ban fellépő magasabbrendű tagok nem gyakorolnak észrevehető befolyást. Ha $e > 0.3$, ezek hatása már mutatkozik oly módon, hogy $\frac{1}{2}T$, $\frac{1}{3}T$ periodusú hibák maradnak a kiegyenlítésnél hátra, melyek az említett tagok hatásából erednek. Jellemző végül a látszólagos ellipszisre, hogy $\omega = 90^\circ$ lévén, a periasztron helyének mindig a pálya legtávolabbi pontjába kell esnie.

GUTHNICK egyik példájában $T = 10$ nap, $k = 0.50$, a paralaxis 0.005 , minek $d = 61.4 \times 10^{14}$ km = 636 fényév felel meg, mi nem tekinthető kivételesen nagy távolságnak, $u = 100$ km/sec. Ez esetben e k -ből számítva 0.25 volna, mi jól egyezik a sebességi görbéből a szokásos módon levezetett értékekkel, $f(u)$ ily feltevések mellett 1 km/sec volna. A szisztematikus maradék hibák már elég jelentékenyek és ± 6 km/sec határok között mozognak és ezért csak igen pontos mérések alapján volnának megkülönböztethetők a kiegyenlítésnél mindenkor hátramaradó véletlen észlelési hibáktól.

Az ω értékek eloszlásának tanulmányozása végett GUTHNICK 59 ismert kettős csillag-pályát vizsgált meg és tényleg feltűnő, hogy ω gyakrabban fekszik 0° és 180° határok között, mint 180° és 360° közt, de döntő következtetést ebből még sem igen vonhatunk le egyrészt az eddig levezetett eredmények korlátolt pontossága miatt, másrészt azért sem, mert ennek a jelenségnek ritkábban kellene fellépni hosszú periodusú csillagoknál, hol u és μ kicsinyek, mint rövid periodusúaknál, ez azonban az eddigi pályák statisztikájában nem mutatható ki.

Meg kell még említenünk, hogy k egységnél nagyobb értékeinél bizonyos esetekben a különböző sugarak sajátoszerű szuperpozíciója is lehetséges, úgy hogy különböző időben, a pálya különböző pontjaiból kiinduló sugarak egy időben érkezhetnek az észlelés helyére. Esetleg három különböző fázis szuperpozíciója is lehetséges, miből egyrészt az következne, hogy a csillag fénye rövid idő alatt háromszorosára növekszik, másrészt,

a spektrum vonalai három komponensre oszolnak. Ezt a lehetőséget vizsgálta meg DE SITTER igen egyszerű módon a RITZ-féle feltevés alapján és kimutatta, hogy már sokkal kisebb távolság mellett mutatkozik a fázisok szuperpozíciója, a mi pedig eddig még nem volt észlelhető, miért is ő a fénysebesség függetlenségét a fényforrás sebességétől bebizonyítottának tekinti, helyesebben megdöntöttnek véli a RITZ-féle föltevést. A GUTHNICK-féle felfogás bizonyítására sincsenek ugyan még elég tapasztalati adataink, de az eddigiekből is láthatjuk, hogy az ily irányú vizsgálatok nem teljesen reménytelenek, miért is kíváncsatos volna alkalmasan választott kettős csillagok pályáját minél pontosabb észlelések alapján gondosan megvizsgálni, hogy az így talált eredmények alapján az itt részletezett fontos fizikai kérdést mielőbb teljesen tisztázhassuk.

Br. Harkányi Béla.

PHYSIKAI SZEMLE.

A katódsugarak nyomása; E. v. ANGERER-től.¹

A katódsugarak nyomásának demonstrálására a következő jól ismert kísérlet szolgál: egy vakuumcsőbe üvegsíneken gördülő szárnyas kerék van bezárva. A cső két elektródja oly módon van elhelyezve, hogy az egyikről kibocsátott katódsugarak mindig a szárnyaskerék felső lapjára essenek. E sugarak hatása alatt a kerék az anód felé gördül. A kísérlet CROKESTÓL származik (1879), s CROOKES szerint a kerék egyedül a katódsugarak nyomása következtében jön mozgásba. J. J. THOMSON kiszámította, hogy egy jelentékeny erősségű (10^{-5} Amp. áramlással egyenlő értékű) katódsugárzás nyomása — a mágneses és elektrosztatikus eltérítésekéből nyert $\frac{e}{m}$ ($= \frac{\text{elektromos töltés}}{\text{tömeg}}$) értékek alapján számítva — nem nagyobb egy milliommód atmoszféra ötszázadrésznél; ez a nyomás pedig semmiképen sem elegendő a CROOKES-féle tűnemény előidézésére. Kitűnt továbbá, hogy a kerék mozgatásánál egyéb körülmények is közreműködnek. E körülmények a következők: 1. A katódsugarak kibocsátásakor radiométeres hatás lép fel. E radiométeres hatás egyrészt a kerék szárnyainak egyenetlen felmelegedésétől származik, másrészt hasonló hatás lép fel a szárnyak és az erősen felmelegedett katód közt. 2. Az elektródok közti elektromos térben a kerékre elektrosztatikus erők hatnak. 3. A kerék szárnyain a sugarak csak egy része nyeletik el, másik részük pedig reflexiót szenved; a katódsugarak szabálytalan reflexiójának hatását pedig nem lehet pontosan számításba venni. — E zavaró körülmények kisebb-nagyobb mértékben a későbbi hasonló tárgyú méréseknél is fellépnek. ANGERER célja a katódsugarak nyomásának quantitativ megvizsgálása e hibaforrások lehető tökéletes elkerülésével.

¹ Ann. d. Phys. (4) , 1. 1. (1913).

² J. J. THOMSON: Conduction of electricity through gases, 501. l. (Cambridge, 1913).

Kísérleti berendezésének lényeges része egy igen érzékeny torziómérleg, melynek egyik karjára van erősítve a katódsugarakat felfogó test. A sugaraknak a felfogó testre gyakorolt nyomása következtében a mérleg elfordul; ez elfordulás szöge szolgál a nyomás nagyságának meghatározására. A radiométeres hatás megszüntetésére, illetőleg annak minimális értékre való redukálása céljából a jelenséget az elérhető legtökéletesebb vákuumban vizsgálja. A szélső vákuumokat folyós levegővel hűtött kókuszdió-szénnel létesítette. Az elért legalacsonyabb nyomás, KNUDSEN-féle manométeren mérve, 8×10^{-7} mm Hg volt, ha azonban a negatív elektródul szolgáló WEHNELT-katód működésben volt, nem lehetett 4×10^{-5} mm Hg-nál kisebb vákuumot fönntartani. Hogy a katód felmelegedése által létesülő radiométeres hatás ne legyen jelentékeny, a torziómérleg a vákuumcső oldalsó ágában volt elhelyezve, hová a katódsugarakat egy elektromágnes irányította. Az elektrosztatikai hatásoktól fémházikó védte a torziómérleget, ahová a katódsugarak csak egy kis ablakon hatolhattak be. Végre a reflexió zavaró hatásának elkerülése céljából a felfogó test üreges fémgömb volt, melyen csak kis nyílás volt hagyva, hogy azon keresztül a sugarak beléphessenek. Az eddigi kísérletek végleges eredményt még nem adtak. A megfigyelt nyomások az elmélet alapján várható értékeket többszörösen is felülmúlták, a miből a különféle, különösen a radiométeres hatásnak még mindig jelentékeny voltára lehet következtetni. A módszer tökéletesítésétől 3—4%-ig pontos adatok várhatók, de aligha nyerhetők oly pontos adatok, hogy azok alapján az elektron töltésének tömegéhez való viszonyát nagy pontossággal lehetne meghatározni, még kevésbé remélhető, hogy e mérések útján a relativitás-elmélet kísérleti úton ellenőrizhető legyen.

Bartoniék Emil.

P. Sève: A víz mágneses susceptibilitásának meghatározása. (Journ. d. Phys. (5) 3. k. 8 l. 1913.)

A víz susceptibilitásának pontos ismerete nagy fontosságú, miután a kevésbé mágnesezhető anyagok susceptibilitását leggyakrabban nem abszolút értékben, hanem pl. éppen a vízére vonatkoztatva határozták meg, holott az abszolút értékek ismerete elméleti szempontból igen kíváncsú (P. WEISS *magneton*-elmélete).

A víz susceptibilitását már igen sokan meghatározták, leginkább a QUINCKE-féle emelkedési módszerrel, amely tudvalévőleg azon alapszik, hogy ha egy diamágneses folyadék szabad felületének A pontja H in-

tenzitású mágneses térben van, a B pont pedig zérus intenzitású térben, akkor A -ban a B -hez képest

$$\delta = x \frac{H^2}{2g}$$

nívósüllyedés jön létre, itt x a susceptibilitást, g a nehézségi gyorsulást jelentik (ha a folyadék paramágneses, x pozitív, vele együtt δ is, tehát az A pont emelkedik). A vízre eddig nyert értékek $-0.68 \cdot 10^{-6}$ és $-0.83 \cdot 10^{-6}$ között ingadoznak, újabb beható pontos mérésre tehát nagyon is szükség van.

SÈVE két különböző eljárással is dolgozott, az első az, a melyet eddig is használtak. Egy elektromágnes pólussarúí között elhelyezett függőleges, néhány mm átmérőjű üvegcső a mágneses téren kívül elhelyezett nagyobb üvegedénnyel közlekedik s mind a kettő vizet tartalmaz; az üvegcsőben a víz meniszkusza a mágneses tér középmagasságában áll. A mágnezt gerjesztve, a meniszkusz lejjebb száll, miután azonban a cső különböző keresztmetszetén a kapilláris depresszió esetleg különböző, nem ezt a leszállást szokás mérni, hanem azt, hogy mennyivel kell a nagyobb víztartóban a víz felszínét emelni, hogy a meniszkusz ismét az előbbi helyére jusson vissza. SÈVE a magasságmérést elkerülendő, a víztartóba annyi lemerít V térfogatú vizet önt, míg a meniszkusz visszaszáll; ha S a víztartó keresztmetszete, természetesen

$$\delta = \frac{V}{S}.$$

Ennek a szokásos mérési eljárásnak két hátránya van: az egyik, hogy $15,000-20,000$ Gauss erősségű térben is δ csak 1 mm rendű, a kapilláris depresszió pedig kb. ötször ekkora; másrészt, hogy a víz felületi feszültsége új és tiszta felületen sem állandó, hanem csak kb. negyedórai csökkenés után ér el állandó értéket, amikor is x -ra a $-0.726 \cdot 10^{-6}$ érték adódott ki.

Ezektől a hibáktól mentes a második, magától SÈVE-től származó eljárás, a melynél nagy kiterjedésű, tehát sík folyadékterületet használ, amelyen tehát kapilláris depresszió nincs. A függőleges tengelyű elektromágnes pólussarúí között elhelyezett 6×12 cm-es lapos üvegcsésze tágas szívócső útján 50×50 cm nagyságú víztartóval közlekedik, mind a kettő vizet tartalmaz. A kisebb edényben a szint helyzetének fixálására a szokásos eljárás szolgál; erősebb nagyítású távcső fonalkeresztjét egy

tűhegy és a tükörképének közepére állítjuk be, ily módon kb. 1 μ pontosságot lehet elérni. A mágnes gerjesztése után leszállt nivót ismét nagyobb víztartóba töltött vízzel visszaállítja előbbi magasságába; a nivó-változás mérését ismét, mint az előbb, a beöntött víz térfogatának mérésére vezeti vissza (figyelembevée a kisebb edénybe átömlő mennyiséget is). Ily módon nyeri, hogy levegőre vonatkoztatva 24° C-nál

$$\alpha = -0.746 \cdot 10^{-6}$$

s mivel (du Bois szerint) a levegő susceptibilitása $-0.026 \cdot 10^{-6}$, tehát vákuumra vonatkozólag a víz susceptibilitása

$$\alpha = -0.720 \cdot 10^{-6}.$$

A fenti képletben δ -n kívül a térerősség, H is szerepel. Ezt is kétféleképen mérte SEVE: indukció-eljárással (próbatékercscsel) s a COTTON-féle elektromágneses mérleggel. Ez utóbbival a mágnes térbe helyezett l hosszúságú, i intenzitású áram átvjárta vezetődarabra gyakorolt H . i . l elektrodinamikussal erő mérk meg közvetlenül gramm súlyokkal; ily módon a H -t néhány ezredrész pontossággal határozta meg.

Selényi Pál.

W. J. de Haas és P. Drapier: A víz abszolút susceptibilitásának meghatározása. (Ann. d. Physik. 42. 673. l. 1913.)

A szerzők ezt a mérést a mágneses vizsgálatairól ismeretes H. du Bois laboratóriumában végezték. Mérési eljárásuk nagyjában a szokásos QUINCKE-féle (l. az előbbi ismertetésben az első módszert), azonban a kapilláris depresszió hatását szellemes módon kiküszöbölték. Hogy lehetőleg erős térrel, azaz egymáshoz közel helyezett pólussarúkkal dolgozhasanak, a mágneses térbe egész vékony, 0.8 mm átmérőjű kapilláris csövet helyeztek, melynek felső szélé teljesen síkra volt lecsiszolva; e kapilláris bővebb edénnyel, az pedig vízmanométerrel közlekedett; az edényben alkalmas berendezéssel a levegő nyomását igen finoman lehetett szabályozni, a nyomás mérésére a vízmanométer és kathetométer szolgált. A kapilláris depressziót kiküszöbölendő, a levegő nyomását addig fokozták, míg a kapilláris felső szélén vízszintes, sík vízmeniszkusz állott elő. A meniszkusz sík, illetve közelítőleg sík voltát úgy ítélték meg, hogy nagyítóval megfigyelték azt a tükörképet, a mit a kis meniszkusz egy felette elhelyezett, félig vörös üveggel befedett egyenesfonalú izzólámpáról adott s a nyomást addig fokozták, míg a vörös-fehér kép meg-

fordult s fehér-vörösnek látszott. A kép tehát ekkor haladt át a nagyító gyújtópontján s a használt méretekből lehetett következtetni, hogy a meniszkus görbületi sugara ekkor 10 cm volt, a minék csupán 0.15 mm depresszió felel meg; ugyanekkor olvasták le a manométert is. A berendezésnek hátrányaként említik fel a szerzők, hogy nehéz a készülékben lévő levegő csekély hőmérsékletkülönbségekből eredő áramlását kiküszöbölni, a mi a nyomásmérés pontosságát károsan befolyásolja.

A 30—40,000 Gauss erősségű mágneses teret du Bois-féle újabb típusú félgűrű-alakú elektromágnessel állították elő s indukziós eljárással mérték; az előállított tér körülbelül 0.1 százalékig homogén volt, a miről egy, talán az egész világon legkisebb indukziós tekercscsel győződtek meg, amelynek átmérője 1.3 mm volt és 0.016 mm átmérőjű drót 90 menetéből állott. Mérésük eredménye gyanánt levegőre vonatkoztatva

$$\alpha = -0.747 \cdot 10^{-6}$$

értéket kaptak, a mi SÈVE-nek fent közölt eredményével kitűnően egyezik, hidrogénre vonatkoztatva pedig (a mit úgy nyertek, hogy a kapillárist hidrogén atmoszférába helyezték) eredményük

$$\alpha = -0.721 \cdot 10^{-6}.$$

Mellékesen megjegyezzük, hogy erősen paramágneses folyadékokkal, például telített nikkelchlorid vagy vaschlorid oldattal közönséges kis elektromágnes tereben is könnyen lehet néhány mm emelkedést kapni, a jelenség tehát — esetleg vetítésben mutatva — előadási kísérletül is nagyon alkalmas.

Selényi Pál.

A Babinet-Soleil-Szivessy-féle kompenzátorról. Ismeretes, hogy szemünk két fényerősség összehasonlításakor a különbség felismerésében jelentékenyen érzékenyebb, ha a két intenzitást egyszerre látja, mint ha a két fénybenyomás egymásután következik.

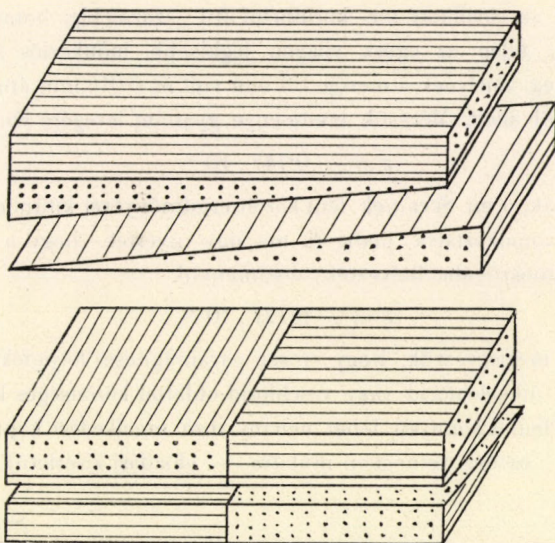
Szemünk e tulajdonságát használta fel SZIVESSY G.¹ a BABINET-SOLEIL-féle kompenzátor beállítási-érzékenységének fokozására.

A BABINET-SOLEIL-féle kompenzátor tudvalevőleg abban különbözik a közönséges BABINET²-féle kompenzáortól, hogy a míg az utóbbi a kom-

¹ G. SZIVESSY: Verhandlungen d. Deutsch. Phys. Gesell. 15. 201. l. (1913). Ann. d. Phys. (4). 42. 555. l. (1913).

² FRÖHLICH I.: Math. Phys. Lapok, 12. 109. l. (1903).

penzátor-ékekre merőlegesen eső parallel fénynyaláb különböző részeinek különböző nagyságú fáziskülönbséget ad, a szerint, hogy hol halad a fény az ékeken keresztül, addig a BABINET-SOLEIL-féle kompenzátornál a kompenzátor által létrehozott fáziskülönbség a sugárnyaláb minden részére nézve ugyanaz. Keresztezett nikolok között tehát a közöséges BABINET-féle kompenzátor látóterében világos és sötét csíkok váltakoznak, a BABINET-SOLEIL-féle kompenzátornak ellenben homogén látótere van, mely teljesen sötét, ha a kompenzátorból kilépő fény az analizátorra



1. ábra. A felső rajz a BABINET-SOLEIL-féle kompenzátor, az alsó a félárnyéklemez vázlata.

merőleges síkban polározott. A poláros fénynek a BABINET-SOLEIL-féle kompenzátorral való tényleges vizsgálatakor a kompenzátort a látótér teljes elsötétülésére állítjuk be, mit a kompenzátor mozgatható élének eltolásával és az analizáló nikol forgatásával mindenkor elérhetünk.

E beállítás érzékenységének fokozására SZIVESSY a BABINET-SOLEIL-féle kompenzátor és az észlelő analizátor közé egy kvarclemezekből készített berendezést helyezett oly célból, hogy a látótér két felében különböző fényintenzitást állítván elő, a kompenzátor beállítását, hasonlóan a rotációpolározás meghatározásánál használatos eljáráshoz, épen ezen intenzitáskülönbség eltüntetésével végezhesse. E berendezés az ú. n.

«félárnyéklemez» két egyenlő vastagságú, az optikai tengelyekkel parallel csiszolt kvarczelemezéből áll (1. ábra), a melyek mindegyike a látótér egy-egy felét elfedi. E kvarczelemek optikai tengelyei egymásra merőlegesek és a BABINET-SOLEIL-féle kompenzátor kvarczelemeinek és ékeinek optikai tengelyeivel parallelek, illetve azokra merőlegesek (az optikai tengelyeket ábránkban vonalkázva, illetve pontozva tüntettük elő). Minden egyes kvarczelem külön-külön a BABINET-SOLEIL-féle kompenzátorhoz hasonlóan egy-egy planparallel kvarczelemezéből és két kis törőszögű kvarczékből áll, mely utóbbiakból az egyik eltolható, oly czélból, hogy a félárnyéklemezen áthaladó fénynyalábnak a látótér két felében egyenlő nagyságú, de ellentett előjelű fáziskülönbséget adhassunk.

Tegyük fel, hogy az összetett kompenzátorra ellipszisben polározott parallel fénynyaláb esik. A kompenzátor tengelyeivel párhuzamos fényvektorkomponensek amplitúdói legyenek: a , illetve b , a két komponens fáziskülönbsége: δ . Jelöljük a BABINET-SOLEIL-féle kompenzátor okozta fáziskülönbséget: $-\varepsilon$ -nal, a félárnyéklemezzel létrehozottat pedig φ -vel. Az utóbbi a látótér egyik felében az ε -nal egyező, a másik felében ellenben ellentett előjelű. Könnyen kimutatható, hogy ha a az analizáló nikol azimutja, akkor a nikolból kilépő fény intenzitása a látótér egyik felében

$$I_1 = a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha + ab \sin 2\alpha \cos (\varepsilon + \varphi - \delta),$$

a másik felében pedig

$$I_2 = a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha + ab \sin 2\alpha \cos (\varepsilon - \varphi - \delta),$$

melyek egyenlőek akkor, ha

$$\varepsilon - \delta = \pm n\pi \quad (n = \text{pozitív egész szám}) \quad (1)$$

vagyis, ha a BABINET-SOLEIL-féle kompenzátorból (de nem a félárnyéklemezzel összetett kompenzátorból) kilépő fény síkban polározott.

Ezen ú. n. «zérus állásban» a homogén látótér intenzitása

$$I_0 = a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha \pm ab \sin 2\alpha \cos \varphi.$$

A \pm előjel folytán a zérusállások két rendszerét kell megkülönböztetni. Az $\varepsilon - \delta$ -nek az (1) alatti értékeiből következik, hogy az ugyanazon rendszerhez tartozó zérusállások 2π -re vannak, a különböző csoportok két szomszédos zérusállásai pedig π -re vannak egymástól. Ha tehát a BABINET-SOLEIL-féle kompenzátor mozgatható kvarczékét az egyik zérus-

állásból kiindulva eltoltjuk, akkor a látótér kétféle különböző intenzitású lesz, mely különbség eleinte növekszik, majd kisebbedik s mikor a BABINET-SOLEIL-féle kompenzátor okozta fáziskülönbség az előbbi zérusálláshoz tartozótól számítva π -vel megváltozott, ismét eltűnik, de a látótér homogén intenzitása általában véve más, mint a mi az előbbi zérusállásban volt; a kvarczék további eltolásával az intenzitási egyensúly ismét felbillen, majd a látótér ismét homogén lesz, ha a fáziskülönbség az első zérusálláshoz képest 2π -vel különbözik, amikor is a homogén látótér intenzitása a kiindulást képező zérusállásával azonos.

Tehát a fáziskülönbség meghatározása ezen összetett BABINET-SOLEIL-féle kompenzátorral teljesen úgy történik, mint az egyszerű BABINET-SOLEIL-féle kompenzátorral, azzal a különbséggel, hogy a beállítás nem a látótér teljes elsötétülésével, hanem a látótér intenzitásának egyenletessé tételével történik.

Kérdés csak az, hogy ezen módszer melyik zérusállás-rendszer és mily φ értéknél legérzékenyebb? Ennek eldöntése szemünknek a különböző intenzitások iránti érzékenységtől függ.

Miután szemünk kisebb intenzitások közötti különbség felismerésében jelentékenyen érzékenyebb, mint nagyobb intenzitások közötti különbség megállapításában, ezért a fenti két zérusállás-rendszer közül a kisebb intenzitású használhatóbb. Behatóbb vizsgálatok eredménye továbbá az, hogy a legérzékenyebb zérusállás az egyéni szemtől függ, de valamennyi szemre nézve igen közel van $\varphi = \pm n\pi$ hez (de ezzel nem egyenlő). Ezen legérzékenyebb zérusálláshoz tartozó fáziskülönbség előállítása céljából a félárnyéklemez egyik éke eltolható. Az összetett BABINET-SOLEIL-SZIVESSY-féle kompenzátor beállítási érzékenysége körülbelül 10 szer nagyobb a közönséges BABINET-SOLEIL féle kompenzátor érzékenységénél.

Megjegyzem, hogy a félárnyéklemez ezen előnye csakis a fáziskülönbség meghatározásánál használható, az amplitúdók viszonyának meghatározására azonban *nem*. Az amplitúdók viszonyának megállapítása akként történik, hogy a félárnyéklemezt a $\varphi = 0$ állásba, tehát azon állásba állítjuk be, a melyben a jelenségre semmiféle hatással nincs, s ezután a keresett viszonyt az egyszerű BABINET-SOLEIL-féle kompenzátorral az ismeretes, rendes módon határozzuk meg.

Rybár István.

W. Gerlach: A sugárzás mérésének egy abszolút módszere (Ann. d. Physik, 38, 1. l. 1912). **S. Valentiner: A Stefan-Boltzmann-féle törvény állandójáról** (Ann. d. Physik, 39, 489. l. 1912). **W. Gerlach: A sugárzásmérések kritikájához** (Ann. d. Physik, 40, 701. l. és 41. 99. l. 1913). **Kurlbaum és Valentiner válaszai az előbbihez** (Ann. d. Physik, 41, 1056. és 1059. ll., 1913).

GERLACH, PASCHEN kezdeményezésére egy lényeges módosítással megismétli KURLBAUMnak 1898-ban végzett méréseit a STEFAN-BOLTZMANN-féle törvény állandójára (σ) vonatkozólag, melyet a következő egyenlet definiál:

$$W = \sigma T^4,$$

hol W egy abszolút fekete test egységnyi fekete felülete által másodpercenként kisugárzott energiamennyiség, T pedig ennek abszolút hőmérséklete.

KURLBAUM berendezésének lényeges része egy mindkét oldalán tökéletesen befeketített vékony bolometer szalag (vastagsága körülbelül 1μ), melynek ellenállásváltozásából következtethetünk a ráeső sugárzásra. Ha ugyanis a bolometerszalagon olyan áramot bocsátunk át, a melynek JOULE-hője épen akkora ellenállásváltozást létesít, mint a sugárzó forrás, akkor a mp.-enként keletkezett JOULE-hő egyenlő a szalagra ugyanannyi idő alatt ráeső energiával, ha a szalag tökéletesen elnyeli a ráeső sugárzást.

PASCHEN szerint a szalag vastagságbeli eltérései a sugárzási állandó értékeit lényegesen megváltoztatják; ezért az ő ajánlatára GERLACH nem a bolométer ellenállásváltozását méri, hanem a bolometerszalag által kisugárzott energiát egy érzékeny termoelem segélyével, melynek forrasztási helyei közvetlenül a szalag háta mögött egyenletesen el vannak osztva. A mérés menete különben egészen úgy történik, mint KURLBAUM-nál. Sugárzó forrásul egy 0 és egy 100°C -os fokú fekete testet (üreg) használ, melyek emisszióképességeinek összehasonlításából adódik a kívánt sugárzási állandó olyképen, hogy a két sugárzó forrás sugárzásbeli különbségét a bolometerszalagnak árammal való melegítésével kompenzálja. Méréseiből a STEFAN-BOLTZMANN-féle törvény állandója

$$\sigma = 5.803 \text{ watt cm}^{-2} \text{ grad}^{-4},$$

a mi a KURLBAUM- és VALENTINER-eredményénél 9%-kal nagyobb.

VALENTINER ellenvetést tesz a mérések helyessége ellen abból a szem-

pontból, hogy a bolométerszalag környezetében lévő levegő hőmérsékletének eloszlása más és más a szerint, mint a szalag a 0 fokú vagy a 100 fokú fekete test sugárzásának van kitevé. Ennek eldöntésére GERLACH utólagosan kísérleteket végez; átvizsgálja mindazon okokat, a melyek a szalag előtti levegőnek különböző felmelegedését előidézhetik (ilyenek a levegő abszorpcziója, hővezetés a sugárzó forrástól a bolométerig, a diafragmák felmelegedése stb.) és szám adatokkal igazolja, hogy mindezek csak elhanyagolható kis hibáknak válhatnak okává.

Vizsgálja továbbá, hogy mily befolyással lehet a szalag vastagságának helyenként való ingadozására a sugárzási állandó értékére vonatkozólag. E célból megvizsgál egy 1.8μ és egy 0.8μ vastag szalagot egyszer a saját, másszor pedig KURLBAUM módszerével, s azt találja, hogy míg az előbbinél semmi különbség sem mutatkozik, addig az utóbbinál a különbség néhány százalékra rúg.

VALENTINER, ki méréseit jóval régebben szintén ily 0.8μ nagyságrendű szalaggal végezte, nem látja evvel bebizonyítotttnak GERLACH állítását. Az eltérés szerinte a hibahatárokon belül esik; másrészt pedig az ő bolométerszalagjai jobbak voltak GERLACH szalagjainál.

Végleges döntés GERLACH és VALENTINER álláspontja közt ezideig még nincs.

Tomits Iván.

Féry és Drecq: Új módszer a Stefan-Boltzmann-féle törvény együtthatójának megmérésére. Journal de Physique. (5), 3. 380 l., (1913).

A szerzők a KURLBAUM-féle abszolút sugárzásmérési eljárásnak (l. a megelőző ismertetést) egy módosítását használják fel a STEFAN-BOLZMANN-féle törvény állandójának meghatározására. Ez a módosítás abban áll, hogy nem közvetlenül a bolométerszalag által elnyelt energiát mérik, mely a reflexió miatt mindig kisebb, mint a beeső energia (bármily jól is van a szalag befekettítve), hanem a lemez mindkét oldalán szétszórt energiát.

A kísérleti berendezés lényege egy 0.03 mm-es, mindkét oldalán egyenlő mértékben befekettített platinalemez, melyre diafragmákon keresztül merőlegesen egy elektromosan fűtött fekete testnek (üreg) sugárzása ejthető. A szalagon szétszórt energia mérésére szolgáló felfogó a szalag mindkét oldalán, tőle egyforma távolságban és egyforma beesési szög (48°) alatt állítható fel.

A szalagnak árammal való hevítésekor (5-től 7 Ampèreig) semmi különbséget sem mutatott a felfogó a lemez két oldalán, ellenben a sugárzó forrás használatakor a lemez mögött és előtt szétszórt energia viszonya körülbelül 0.82 volt, miből azt lehet következtetni, hogy a szalagnak elég erős reflexióképessége van.

A sugárzási állandó mérésének kivitele a következő. A szalagon először áramot bocsátanak át s meghatározzák a szalag kalibrálási görbáját, vagyis azt, hogy a szalagot melegítő áram minden wattszámához a felfogónak milyen adata tartozik (a lemez egyik oldalán végezve a mérést); azután ezen kalibrálási görbe segítségével megállapítják a sugárzó forrás által szétszórt energiát a szalag mindkét oldalán. A kettő összege lesz a szalagra mp.-kint beeső sugárzási energia, miből a sugárzási állandó megállapítható; a szerzők mérésének eredménye.

$$\sigma = 6.20 \text{ watt cm}^{-2} \text{ grad}^{-4}.$$

A mérési módszernek egyetlen megtámadható pontja volna a szerzők szerint az, hogy kétségsbe vonható a LAMBERT-féle fotometrikus törvény érvényessége, melyet méréseiknél felhasználtak. BAUER és MOULIN azonban kísérletekkel megállapították, hogy a platina még vörös izzásnál is követi a törvényt.

Az eredmény igazolni látszik a szerzők 1909 és 1911-ben végzett méréseinek helyességét; az állandó értéke mind a három esetben 16—20%-al nagyobb mint KURLBAUM és VALENTINER-é. FÉRY és DRECQ e szerint szintén igazolják GERLACH-nak azt az állítását, hogy a KURLBAUM-VALENTINER-féle adat túl kicsiny.

Tomits Iván.



PHYSIKAI LABORATORIUM.

Elektromos időmérő készülék periodikus jelenségek összehasonlítására; G. LIPPMANN-tól.¹

A készülék elsősorban periodikus mozgások, pl. csillagászati órák vagy kronométerek járásának összehasonlítására használható, azonkívül mint czélszerű segédeszköz alkalmazható a szikratávíró időjeleinek fel-fogásánál és ez időjelek kibocsátásánál is.

A készülék a következő: Az O tengelyt alkalmas motor egyenletes forgásban tartja; a forgássebesség bizonyos határok közt tetszés szerint változtatható. Az O tengelyre merőlegesen egy fémkar van szerelve, mely mozgása közben az α és β keskeny kontaktusokat érinti s mindannyiszor egy áramkört rövid időre zár; a zárás pillanatában az áramkörbe kapcsolt telefonban rövid ütések hallani. Az α és β kontaktusok fogantyúk segítségével a fémkar által leírt kör területének tetszőleges pontjaiba vihetők s a kontaktusok helyzete fokosztályzaton leolvasható.

1. Ha két csillagászati óra állását akarjuk egymással összehasonlítani, a következőképen kell eljárunk: A készülék forgássebességét úgy szabályozzuk, hogy a fémkar másodpercenként egy fordulatot tegyen. Ekkor úgy az egyik, mint a másik kontaktus által adott ütések az órák ketyegésének ütemében fognak történni. Most a fogantyúkkal a kontaktusokat úgy állítjuk be, hogy az α által szolgáltatott jelek az egyik-, a β által szolgáltatott jelek pedig a másik óra ketyegésével esnek össze. Ezután a készüléket megállítjuk s a kontaktusok közti ívtávolságot $\widehat{\alpha\beta}$ -t a fokosztályzaton leolvassuk. A két óra állásának különbsége, eltekintve természetesen egész másodpercektől, a másodpercnek oly tört része lesz, a milyen tört része az $\widehat{\alpha\beta}$ ív az egész kör területének, vagyis az egyik órának másikhöz való késése ($\widehat{\alpha\beta} : 360$) sec.

2. Az Eiffel-toronyról minden délben, másodpercznyi közökben ki-

¹ Journal de Physique, (6) 3, 5. 1. (1913).

bocsátott időjelek felfogásánál a megfigyelő feladata megállapítani az időjeleknek egy az állomáson felállított csillagászati órához való késését. E célból a készüléket megint másodpercenként egy fordulattal járátva, α kontaktust az óra ketyegésére, β -t pedig az időjelre állítja be. A keresett késés itt is ($\alpha\beta:360$) sec lesz.

3. Az Eiffel-torony időjeleit jelenleg a párisi obszervatórium egyik órája váltja ki. Az óra jeleinek az antennáig való közvetítése azonban bizonyos késéssel történik. Az ezáltal szükségessé váló korrekciók csak elég bonyolult kísérletekkel határozhatók meg. A készülékkel elérhető az időjelek helyes pillanatokban való kibocsátása külön korrekciómeghatározás nélkül is. Az α kontaktust a készülék másodperczes körülfordulása mellett a kérdéses csillagászati órához úgy állítjuk be, hogy mindig az óra ketyegésével összeeső pillanatokban adjon jelt a készülék telefonjában. A fémkarnak β kontaktussal való érintkezésekor most nem a készülék telefonköre, hanem az elektromágneses hullámokat kiváltó áramkör záródik; a β kontaktus eltolásával tehát az áramkör zárásának és egyúttal a szikrajelek kibocsátásának pillanatai is változnak s így annak állításával a megfigyelő elérheti, hogy az Eiffel-toronyból kibocsátott és az observatorium felvevőállomásába kapcsolt telefonban hallható időjelek a csillagászati óra telefonjának helyes másodperczjeleivel összeesnek.

Bartonic Emil.

A levegő relatív nedvességének meghatározása refraktometerrel; F. GIRAUD-tól.¹

A levegőre kitett gliczerin a levegőből bizonyos mennyiségű vizet vesz fel. Az elnyelt vízmennyiség a relatív légnedvességtől függ. A gliczerin törésmutatójának vízabszorpczió által bekövetkezett változása így a levegőnedvesség mértékeül szolgálhat.

A gliczerin törésmutatója és a levegőnedvesség közti összefüggést GIRAUD kísérletileg meghatározta. A következő pár számadat kísérleti adatai alapján szerkesztett táblázatából való.

¹ Journal de Physique, (5.) 3. 900 l. (1913.)

Relatív nedvesség %-ban	Törésmutató.
40·31	1·450
50·15	1·442
60·67	1·432
70·33	1·421
80·12	1·407
90·04	1·387
100·00	1·333

Kísérleti eredményeit a következő empirikus képlettel állította elő:

$$H = 100 (1 - \alpha^x),$$

a hol H a légnedvesség százalékokban

$$\alpha = \frac{n - 1.333}{1.4747 - 1.333} = \frac{n - 1.333}{0.1417}$$

(n a megfigyelt törésmutató, 1·4747 a gliczerin, 1·333 a víz törésmutatója 20° C-nál),

$$x = n^{2.666}.$$

Az adatok 20° C hőmérsékletre vonatkoznak. Mivel a törésmutató a hőmérséklettel is változik, 20° C-tól eltérő hőmérséklet esetén a második oszlop adatait korrigálni kell.

A hőmérsékleti korrekció a törésmutatóban — 0·00026 (20— t) és — 0·00017 (20— t) között változik a $H = 33$ -tól 100-ig terjedő közben.

A mérés legegyszerűbben ABBE-féle refraktometerrel történhetik. GIRAUD tapasztalatai szerint evvel az eszközzel a légnedvességre nézve könnyen nyerhetők 0·1%-ig pontos adatok.

Bartoniek Emil.

ELŐADÁSI KISÉRLETEK.

Kísérlet az erő fogalmának bevezetéséhez. Igen sok oly kísérletet ajánlottak már, melynek rendeltetése szemléltetni az erő, tömeg és gyorsulás közti NEWTON-féle összefüggést.

Néhány év óta műegyetemi előadásaimon is bemutatok egy ilyen kísérletet, mely talán érdekelni fogja az olvasót.

A kísérlet célja megmutatni, hogy ha ugyanazon erő egymás után különféle tömegekre hat, az erő létesítette gyorsulások a tömegekkel fordítva arányosak.

Mikor e tárgyhoz érünk, a «kinematikát» már befejeztük, úgy, hogy a hallgatóság már ismeri az egyszerű rezgő vagy lengő mozgásnak azt a jellemző sajátosságát, hogy a gyorsulás (x'') arányos az elmozdulással (x) és vele ellentett irányú, hogy tehát:

$$x'' = -\omega^2 x, \quad (1)$$

és hogy az ω arányossági tényező a T lengési idővel a következő kapcsolatban van:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}.$$

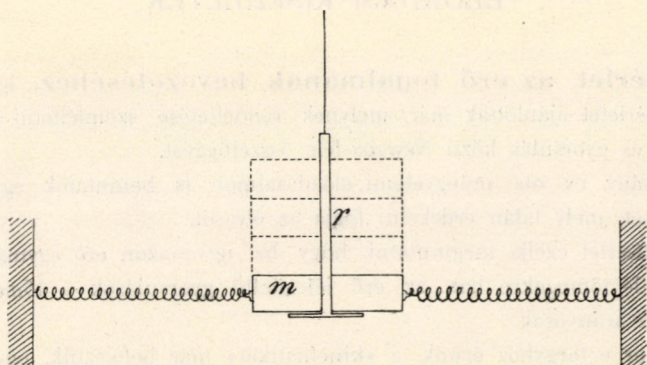
Ha tehát két különböző lengés-idejű harmonikus mozgást oly pillanatokban hasonlítunk össze, a melyekben kilengésük (x) ugyanakkora, gyorsulásaik a lengési idők négyzeteivel fordítva arányosak lesznek.

E tételt használtam fel arra, hogy az ugyanazon erő által különböző testekben létesített gyorsulásokat összehasonlítsam.

A kísérlet a következő (1. a 2. ábrát): Lehetőleg hosszú (6—10 méteres), vékony aczéldróton korongalakú súly függ, melybe jobbról-balról csavarvonalba sodort aczéldrótok akaszkodnak; e rúgók másik vége Bunsenállványokkal vagy másképpen mereven rögzítendő, úgy hogy a rúgók tengelye vízszintes legyen.

Ha a m tömeget egyensúlyi helyzetéből a rúgók tengelye irányában kimozdítjuk, a tömeget oly erő fogja visszahúzni egyensúlyi helyzete felé, mely csakis az x elmozdulás nagyságától fog függeni. Ugyanazon x esetében tehát a rendszerre ható rugalmas erő ugyanaz marad.

Végezzük már most a következő két kísérletet: hozzuk lengésbe az imént leírt rendszert és mérjük meg lengésidejét T_1 -et; azután helyezzünk a m tömegre még három ugyanakkora tömeget úgy, hogy az



2. ábra.

anyag mennyisége, melyre a rugalmas erő most hat, megnégyszereződik; a lengésidej legyen e második esetben T_4 . A két esetben a mozgások egyenletei:

$$x_1'' = -\frac{4\pi^2}{T_1^2} \cdot x_1 \quad (2)$$

$$x_4'' = -\frac{4\pi^2}{T_4^2} \cdot x_4 \quad (3)$$

Oly pillanatokban, a mikor $x_1 = x_4$ a két esetben működő rugalmas erő ugyanaz, míg az erő által létesített gyorsulásokra nézve a (2) és (3)-ból következik, hogy:

$$x_1'' : x_4'' = T_4^2 : T_1^2.$$

A kísérletek azt mutatják, hogy

$$T_4 = 2T_1.$$

tehát a négyszeres tömeggel ugyanaz az erő negyedakkora gyorsulást közöl.

A kísérletre vonatkozólag még megjegyzendők a következők:

1. Minthogy a tömeg mérése csak az igazolandó összefüggés alapján történhetik, a leírt kísérletben négy ugyanazon anyagból készült, teljesen egybevágó korongot használunk; ez esetben, tömegmérés nélkül is világos, hogy a második esetben a mozgatott anyag mennyisége négyszer akkora, mint az elsőben.

2. Az eddigi tárgyalást úgy vezettük, mintha a tömegek mozgásukat egyedül a rúgók rugalmas erejének köszönhetnék. Pedig a nehézségi erő is működik, melynek egyedüli hatása alatt a rendszer közösleges ingalengést végezne. Egyszerű számítás azonban megmutatja, hogy a nehézségi erő befolyása — legalább ama pontossági határokon belül, a melyet egy előadási kísérlettől megkívánunk — elhanyagolható.

Ugyanis a rendszernek mozgásegyenlete, tekintettel a nehézségi erőre, kis kilengéseknél a következő:

$$mx'' = -mg \cdot \frac{x}{l} - \tau \cdot x,$$

ahol g a nehézség gyorsulása, l az inga hosszúsága, τ pedig az egyensúlyi elmozdulás mellett fellépő rugalmas erő. Végigosztva m -mel:

$$x'' = -\left(\frac{g}{l} + \frac{\tau}{m}\right) \cdot x.$$

E szerint:

$$\omega^2 = \frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{g}{l} + \frac{\tau}{m}.$$

A mi esetünkben $l = 650$ cm, tehát $\frac{g}{l} =$ körülbelül $\frac{3}{2}$, ha pedig oly rúgókat használunk, a melyeknél a négyszeres súly használata mellett $T_4 = 1$ sec., akkor

$$4\pi^2 = \frac{3}{2} + \frac{\tau}{m} = 40$$

tehát a nehézségi erő befolyása a kevésbé kedvező esetben a rugalmas erő befolyásának huszonhatodrésze. A lengésidőben észlelhető befolyás e szerint csak $\frac{1}{50}$, a minek elhanyagolása előadási kísérletben megengedhető.

Természetesen még hosszabb felfüggesztés alkalmazása mellett a viszonyok még kedvezőbbek. Hogy az aránylag kicsiny lengésidőt megkapjuk, 1 milliméter vastag zongorahúrt sodortam össze körülbelül $\frac{3}{4}$ cm átmérőjű csavarvonallá.

3. Másik hibaforrás a drótok tömege, mely a lengésben szintén részt vesz, azonkívül a súlyok felrakásához szükséges r rúd; én egy-egy korongot körülbelül 1000 gr tömegűnek vettem s így a drótok és a r aluminiumrúd tömegét szintén el lehetett hanyagolni; egyébként lehet a korongokat úgy is méretezni, hogy az első korongot megfelelően kisebbnek vesszük.

4. A lengésidőket czélszerű metronómmal mérni, illetőleg összehasonlítani. Beállítjuk a metronómot úgy, hogy együtt lengjen a gyorsabbik rezgéssel; azután fölrakunk még három korongot és a metronómot változatlanul hagyva megállapítjuk, hogy rendszerünk egy lengésére a metronómnak két lengése esik.

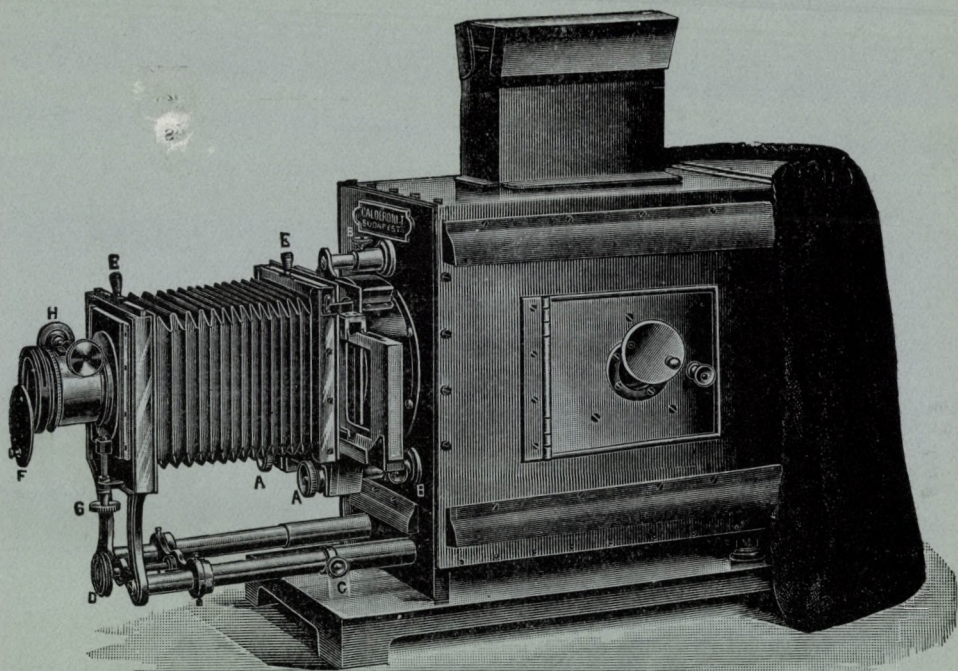
A kísérlet végrehajtásában az egyedüli nehézség a hosszú felfüggesztés; ilyesmi azonban, pl. az épület lépcsőházában is elhelyezhető és sok egyéb kísérletnél is igen jól felhasználható, pl. *Fancault* ingakísérleténél, sőt antennának is jó, drótnélküli táviróhoz. Ezért ily hosszú felfüggesztés berendezése minden fizikai intézetben igen kívánatos.

Zemplén Győző.

Calderoni mű- és tanszervállalat r.-t.

Budapest, IV., Váci-utca 50.

Ajánlja saját szerkesztésü szabadalmazott vetítőkészülékeit.



Vetítőkészülék «Calderoni B»

Ezen készülék lámpa-szekrénye legjobb minőségű aczéllemezekből van készítve, eternit-béléssel és kitűnő szellőztető szerkezettel van ellátva, 120 mm. átm. kettős megvilágítólenesével (Kondensor), hajtócsavarral ellátott objektív-foglalattal, egy ebbe illő kitűnő vetítési objektívvel, a finom beállítás részére szolgáló mikrometer-csavarral és tolószerkezettel ellátott kettős kép-váltó kerettel van felszerelve. A kondensor-lencsék a lámpatartó szekrényen kívül vannak elhelyezve és a lencsék közt felmelegedő levegő a kondensort tartó cső felső részén levő és egy kis fedővel borított nyíláson át távozhatik. A kondensor mögött egy kali-üvegből készített védőlemez van elhelyezve. — A készülék, mely egy áttört vastalapzatra van felszerelve, teljesen fémből van készítve. — A bronzból készített objektívet tartó előrész egy mikrometer-csavar segítségével magasabbra és mélyebbre állítható. Az oldalajtóval és bárszönyből készült fényelzáró-függönnyel ellátott készülék ára fenti felszerelés-sel *lámpa nélkül*

K 260.—

Vetítőkészülék «Calderoni I. H.»

Ezen készülék, mely ugyanolyan szerkezetű mint a túltoldali, egy általunk szerkesztett hűtővel van még ellátva, mely a megvilágító lencsék közé van iktatva. — Ezen felszerelés vetítő készülékünket a legtökéletesebb ilyenmű készülékké avatja. Ára *lámpa nélkül* K 350.—

A vetítőkészülékeinkhez felszerelt hajtócsavarral ellátott objektív foglalatba tetszés szerinti 6 különféle gyújtávolságu vetítési objectivet lehet elhelyezni, melynek gyújtávolsága 150, 200, 250, 310, 355, 405, mm. — Minden készülékhez a fentjelzett árban csak egy darab ilyen vetítési objektív tartozik. — Minden további objektív ára darabonként K 24.—

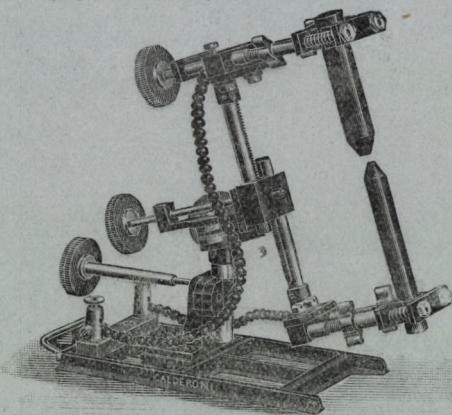
Vetítőkészülékeink a merőleges és vízszintes síkban végbemenő vetítésre, valamint mikroszkopikus vetítésre is, úgy szintén szinképek, interferenciális tűneménvek, fényelhajlási, fényarkítási és kettős törési kísérletek stb. vetítésére is alkalmasak. Ezen mellékeszközökről addig is, míg az ezekről szóló külön árjegyzékünk meg fog jelenni, kívánatra szívesen küldünk részletes költségvetéseket. Vetítőkészülékeinket — melyek a legtökéletesebbek — tetszés szerinti fényforrással, u. m. villamos ívfénnyel, mészfénnyel, acetylénnel, borszesz-izzófénnyel stb. szállítjuk.

Elektromos ívlámpa

legjobb minőségű és felette erős szerkezetű (mellékelt ábra szerint) mely hajtócsavarok segítségével minden irányban könnyen mozgatható, 110—220 volt feszültségű egyen- vagy váltóáramhoz, 5—50 Ampère áramerősségig használható. Ára K 120.—

Elektromos ívlámpa

egyszerűbb és könnyebb szerkezetű. Ára K 90.—



Borszesz-izzófénnyel lámpa légsűrítővel ellátva, mely 300 gyertya-fény erejű világítást szolgáltat. Ára teljesen felszerelve K 50.—

Háromlábú asztalállvány, mely hajtócsavar-szerkezet segítségével magasabbra és mélyebbre állítható, felső lapja pedig a vetítőkészülék által esetleg megkívánt szög alá, illetve ferde állásba hozható. Ára K 110.—

Vetítési ernyő finom vászomból 200 cm. négyzetben, gyűrűkkel ellátva. Ára K 8.—

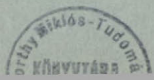
Ernyő-állvány fenti ernyő részére, mely könnyen és gyorsan szétszedhető. Ára szekrényben K 30.—

Vetítési ernyők zsinórral felhúzható szerkezettel. — Ezen ernyők legcélszerűbben a falra erősítendő 2 vastámaszra szerelendők, azonban bárhová, esetleg közvetlenül a falra is felerősíthetők. — Az ernyők árai a következők:

	200	240	300	360	420	480 cm. négyzetben
Ára	45.—	65.—	90.—	145.—	200.—	240.— korona.

Calderoni mű- és tanszervállalat részvénytársaság, Budapest, IV., Váci-utca 50.

Részletes nagy árjegyzék vetítőkészülékeinkről munkában van.



MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI LAPOK

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT MEGBIZÁSÁBÓL

SZERKESZTIK

FEJÉR LIPÓT és ZEMPLÉN GYŐZŐ

HUSZONHARMADIK ÉVFOLYAM

II. FÜZET

1914

FEBRUÁR.

BUDAPEST

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT

1914.



TARTALOM.

	Lap
TIHANYI MIKLÓS: Adalék a számelmülethez	57
PRIVORSZKY ALAJOS: A függvénytan elméletéhez	61
TILLINGER ISTVÁNKA: A transcendens egész függvények növekedésének vizsgálata kapcsolatban az analitikai függvények szingularitásainak vizsgálataival (Első közlemény)	72
OLTAY KÁROLY: A Nagy Magyar Alföldön, a Mezőségen és a Gyergyói Fensíkon végzett nehézséggyorsulás-méréseim végeredményei	82
<i>Physikai Szemle</i> : A kombinációs hangokról (BARTONIEK) 103. l. — C. Benedicks: A Planck-féle energiaeloszlási törvény levezetése agglomerációs hipotézissel (TOMITS) 106. l.	
<i>Physikai laboratórium</i> : A vízvezeteki nyomást csökkentő és állandó nyomásmagasságot biztosító készülék (SCHULLER) 108. l.	
<i>Előadási kísérletek</i> : Készülék két körmozgás egyenes eredőjének bemutatására (SCHULLER) 110. l. — A Stevart-féle lejtő némi kiegészítéséről (SCHULLER) 112. l.	

Értesítjük olvasóinkat, hogy folyó évi január elsejétől fogva e Lapok szerkesztését az alulirottak vették át. E munkánkban az eddigi szellemhez óhajtván ragaszkodni, hangsúlyozzuk t. munkatársaink előtt, hogy igen szívesen közlünk oly rövid és alapos dolgozatokat, a melyek a tudománynak különösen újabb eredményeit könnyen érthető modorban ismertetik.

Fejér Lipót és Zemlén Győző.

A folyóirat szellemi részét illető közlemények (cikkek, feladatok, stb.) a szerkesztőkhöz küldendők, és pedig a matematikai tárgyuak *Fejér Lipót* (V., Falk Miksa-utca 15.), a fizikai tárgyuak pedig *Zemlén Győző* (I. Fehervári-út 54/a) czimére. T. munkatársainkat kérjük, hogy kézírataikra mindenkor írják fel a pontos címet, melyre a korrekurák küldendők.

Minden szerzőnek 25 pld. különlenyomatot adunk üres borítékkal (kivéve az *Irodalom*, *Physikai Szemle*, *Physikai Laboratorium*, *Megoldott feladatok* stb. rovatokban megjelent közleményeket). Címzett borítékot vagy több különlenyomatot csak külön kívánságra, a megfelelő költségek felszámításával adhatunk.

A Lapok 1913. évi hátralékos füzetek rövid időn belül meg fognak jelenni.

Társulati mondanivalók. A huszonharmadik társulati év 1914 január elsején kezdődött.

A tagsági díj (Budapestben 10 korona, vidéken 6 korona) az Alapszabályok VII., 12. §-a szerint az év első negyedében esedékes. Kérjük t. Tagtársainkat, szíveskedjenek a tagsági díjat a társulat pénztárnoka: *Privorszky Alajos* (VII., Ilka-u. 32) czimére beküldeni. A mult évekről hátralékban lévő tagtársainkat sürgősen kérjük a tagsági díj beküldésére. A befizetések megkönnyítése végett ez évfolyam januári számához befizető lapokat mellekeltünk.

Kérjük tagtársainkat, hogy mindazokat, a kik a matematika vagy fizika iránt érdeklődnek, tagokul ajánlják. A tagajánlások és a társulat ügyeire vonatkozó egyéb kérdések *Zemlén Győző* ügyvivő titkár fenti czimére intézendők.

A reklamációk, címváltozások a pénztárnokhoz intézendők.

MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI LAPOK

E folyóirat évenként 8, legalább három ívnyi füzetben jelenik meg, a nyári hónapok kivételével, a hó második felében.

Előfizetési díj egy évre 10 K. A Matematikai és Physikai Társulat tagjai a folyóiratot tagsági díjuk fejében kapják.

23. évfolyam.

1914, február.

2. füzet.

ADALÉK A SZÁMELMÉLETHEZ.

Ha $a^3 \equiv 1 \pmod{r}$, de $a \not\equiv 1 \pmod{r}$ és r törzsszám, akkor

$$(a+1)^{6n+4} + a^{6n+4} \equiv -1 \pmod{r^2}$$

és

$$(a+1)^{6n+1} - a^{6n+1} \equiv 1 \pmod{r^2}.$$

$a^3 \equiv 1 \pmod{r}$ még így is írható:

$$(a-1)(a^2+a+1) \equiv 0 \pmod{r},$$

a miből következik, hogy $a(a+1)+1 \equiv 0 \pmod{r}$. Ennek az utóbbi eredménynek alapján könnyű megállapítani, hogy $(a+1)^6 \equiv 1 \pmod{r}$; ugyanis

$$a(a+1) \equiv -1 \pmod{r},$$

tehát

$$a^3(a+1)^3 \equiv -1 \pmod{r},$$

s így

$$(a+1)^3 \equiv -1 \pmod{r},$$

vagy

$$(a+1)^6 \equiv 1 \pmod{r}.$$

Bizonyítsuk be először tételünk első részének helyességét $n=0$ esetben, vagyis, hogy:

$$(a+1)^4 + a^4 \equiv -1 \pmod{r^2}.$$

Minthogy az előzők alapján

$$a^2 + a + 1 \equiv 0 \pmod{r},$$

következik az is, hogy

$$2a^2 + 2a + 2 = (a+1)^2 + a^2 + 1 \equiv 0 \pmod{r};$$

tehát

$$[(a+1)^2 + a^2 + 1]^2 \equiv 0 \pmod{r^2};$$

de ezen utóbbi kifejezés még így is írható:

$$(a+1)^4 + a^4 + 1 + 2[a(a+1) + 1]^2 \equiv 0 \pmod{r^2}.$$

Minthogy

$$[a(a+1) + 1]^2 \equiv 0 \pmod{r^2},$$

nyerjük:

$$(a+1)^4 + a^4 \equiv -1 \pmod{r^2}.$$

Tételünk általános érvényességét teljes indukcióval igazolhatjuk. Az előzőekben láttuk, hogy

$$(a+1)^3 \equiv -1 \pmod{r};$$

világos tehát, hogy

$$(a+1)^{3n} \equiv \pm 1 \pmod{r},$$

a szerint, a mint n páros vagy páratlan; ebből következik:

$$[(a+1)^{3n} \mp 1]^2 \equiv 0 \pmod{r^2};$$

kifejtés és $(a+1)$ -gyel való szorzás után:

$$(a+1)^{6n+1} \mp 2(a+1)^{3n+1} + (a+1) \equiv 0 \pmod{r^2}. \quad \alpha)$$

A feltételből következők, hogy $a^{3n} \equiv 1 \pmod{r}$; innen

$$(a^{3n} - 1)^2 \equiv 0 \pmod{r^2};$$

kifejtés és a -val való szorzás után:

$$a^{6n+1} - 2a^{3n+1} + a \equiv 0 \pmod{r^2}. \quad \beta)$$

Ha az $\alpha)$ alatt levő kongruenciából kivonjuk a $\beta)$ alatt levőt, nyerjük:

$$(a+1)^{6n+1} - a^{6n+1} \mp 2[(a+1)^{3n+1} \mp a^{3n+1}] + 1 \equiv 0 \pmod{r^2}. \quad 1)$$

Itt is a felső vagy alsó jel érvényes, a szerint, a mint n páros vagy páratlan.

Mivel

$$(a+1)^3 \equiv -1 \pmod{r},$$

írhatjuk még, hogy

$$(a+1)^{3n+2} \equiv \pm (a+1)^2 \pmod{r}$$

a szerint, a mint n páros vagy páratlan; ebből pedig következik, hogy

$$[(a+1)^{3n+2} \mp (a+1)^2]^2 \equiv 0 \pmod{r^2};$$

kifejtés után:

$$(a+1)^{6n+4} \mp 2(a+1)^{3n+4} + (a+1)^4 \equiv 0 \pmod{r^2}. \quad \gamma)$$

Hasonló módon a feltételből következik:

$$a^{3n+2} \equiv a^2 \pmod{r};$$

tehát

$$(a^{3n+2} - a^2)^2 \equiv 0 \pmod{r^2},$$

ez pedig kifejtett alakban így írható:

$$a^{6n+4} - 2a^{3n+4} + a^4 \equiv 0 \pmod{r^2}. \quad \delta)$$

A γ) és δ) alatt nyert kongruenciák összege adja:

$$(a+1)^{6n+4} + a^{6n+4} \mp 2[(a+1)^{3n+4} \pm a^{3n+4}] + (a+1)^4 + a^4 \equiv 0 \pmod{r^2}. \quad 2)$$

Az 1) és 2) kongruenciák szolgálatjára tételünk induktív igazolását; tegyünk az 1) alatt levő kongruenciába n helyett 1-et:

$$(a+1)^7 - a^7 + 2[(a+1)^4 + a^4] + 1 \equiv 0 \pmod{r^2};$$

ámde

$$(a+1)^4 + a^4 \equiv -1 \pmod{r^2},$$

s ezt figyelembe véve a következő eredményt nyerjük:

$$(a+1)^7 - a^7 \equiv 1 \pmod{r^2}.$$

Tegyünk most a 2) alatt levő kongruenciában n helyébe 1-et:

$$(a+1)^{10} + a^{10} + 2[(a+1)^7 - a^7] + (a+1)^4 + a^4 \equiv 0 \pmod{r^2};$$

ez az előzők alapján így alakul:

$$(a+1)^{10} + a^{10} \equiv -1 \pmod{r^2}.$$

Ezen eljárást ismételve, vagyis az 1) és 2) alatt levő kongruenciákban n helyébe 2, 3, 4, ... értékeket helyettesítve, a következő eredményekre jutunk:

$$(a+1)^{13}-a^{13}\equiv 1 \pmod{r^2}$$

$$(a+1)^{16}+a^{16}\equiv -1 \quad \text{«}$$

$$(a+1)^{19}-a^{19}\equiv 1 \quad \text{«}$$

$$(a+1)^{22}+a^{22}\equiv -1 \quad \text{«}$$

$$(a+1)^{25}-a^{25}\equiv 1 \quad \text{«}$$

$$(a+1)^{28}+a^{28}\equiv -1 \quad \text{«} \quad \text{s i. t.}$$

Mindezekből most már következik tételünk általános érvénye. Tételünk folyományaképen megemlíthetjük, hogy ha

$$a^3\equiv 1 \pmod{r},$$

akkor

$$(a+1)^r-a^r\equiv 1 \pmod{r^2}.$$

Tihanyi Miklós.

A FÜGGVÉNYTAN ELMÉLETÉHEZ.

Legyenek

$$x=x(u, v, w), \quad y=y(u, v, w), \quad z=z(u, v, w) \quad (1)$$

az u, v, w változóknak differenciálható függvényei és az (1) alatti egyenleteknek u, v, w szerint való megoldásai legyenek:

$$u=u(x, y, z), \quad v=v(x, y, z), \quad w=w(x, y, z). \quad (2)$$

Tudjuk, hogy a (2) alatti u, v, w függvényeknek az (1) alatt egyenletekből való kiszámításánál gyakran leküzdhetetlen akadályokba ütközünk. Mindazonáltal fontos lehet annak az eldöntése, bírnak-e a (2) alatti függvények valamely meghatározott tulajdonsággal, feltéve, hogy az (1) alatti függvények bizonyo feltételeknek eleget tesznek.

Például az a kérdés merülhet fel, eleget tesz-e bizonyos feltételek mellett a (2) alatti függvények valamelyike a

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$

LAPLACE-féle differenciálegyenletnek?

Minthogy ez az egyenlet az elméleti fizikában fontos szerepet játszik, azt hiszem, nem végzek felesleges munkát, ha egy a függvénytan e kérdésére vonatkozó tétel közlésére és behizonyítására vállalkozom.

Mielőtt a tételre áttérnék, megjegyzem, hogy

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \quad (3)$$

függvénydetermináns egyes elemeinek adjungált aldeterminánsait sorban

$$\begin{array}{ccc} a, & a, & A, \\ \beta, & b, & B, \\ \gamma, & c, & C, \end{array}$$

betűkkel jelölöm. Magáról a függvénydeterminánsról felteszszük, hogy az u, v, w tekintetbe veendő értékeinél véges és nem azonosan zérus.

A most bebizonyítandó tétel a következő:

Ha az (1) alatti függvények eleget tesznek a

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial w} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial w} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial w} &= 0 \\ \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial w} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial w} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial w} &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

differentiálegyenletnek, úgy a (2) alatti w függvény akkor és csak akkor tesz eleget a

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0 \quad (5)$$

LAPLACE-féle differentiálegyenletnek, ha a

$$\Delta' = \frac{A^2 + B^2 + C^2}{\Delta} \quad (6)$$

hányados a w -től független.

Ez a tétel be lesz bizonyítva, ha a

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \frac{1}{\Delta} \frac{\partial \Delta'}{\partial w} \quad (7)$$

egyenlet helyességét kimutatjuk. Mert ha ez az egyenlet fennáll, akkor a $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}$ kifejezés akkor és csak akkor lehet zérus, ha a $\frac{\partial \Delta'}{\partial w}$ parciális differentiálhányados zérus; ez pedig akkor és csakis akkor lesz zérus, ha a (6) alatti Δ' hányadosban a w explicite elő nem fordul.

Hogy tehát a (7) alatti egyenlet helyességét kimutassuk, arra törekszünk, hogy a w függvénynek benne előforduló másodrendű differenciálhányadosait az x, y, z és azok u, v, w szerinti differenciálhányadosai segítségével kifejezzük. E végből differenciáljuk parciálisan az (1) alatti egyenleteket x, y, z szerint és akkor a következő három egyenletrendszert nyerjük.

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial x} &= 1, \\ \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial x} &= 0; \\ \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial x}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial y}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial y} &= 1, \\ \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial y} &= 0; \\ \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial x}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial y}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial z}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial z} &= 1. \end{aligned}$$

Ha ezt a három egyenletrendszert az u, v, w -nek differenciálhányadosai szerint megoldjuk, a következő értékekhez jutunk:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{a}{\Delta}, & \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{a}{\Delta}, & \frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{A}{\Delta}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\beta}{\Delta}, & \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{b}{\Delta}, & \frac{\partial w}{\partial y} &= \frac{B}{\Delta}, \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{\gamma}{\Delta}, & \frac{\partial v}{\partial z} &= \frac{c}{\Delta}, & \frac{\partial w}{\partial z} &= \frac{C}{\Delta}. \end{aligned} \tag{8}$$

Ezek alapján:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{A}{\Delta} \right), \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{B}{\Delta} \right), \quad \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{C}{\Delta} \right),$$

vagyis:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= \frac{1}{\Delta^2} \left[\Delta \left(\frac{\partial A}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \right. \\ &\quad \left. - A \left(\frac{\partial \Delta}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \Delta}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \Delta}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right], \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= \frac{1}{\Delta^2} \left[\Delta \left(\frac{\partial B}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial B}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial B}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial y} \right) - \right. \\ &\quad \left. - B \left(\frac{\partial \Delta}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \Delta}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \Delta}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right], \\ \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} &= \frac{1}{\Delta^2} \left[\Delta \left(\frac{\partial C}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial C}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial C}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial z} \right) - \right. \\ &\quad \left. - C \left(\frac{\partial \Delta}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial \Delta}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial \Delta}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right]. \end{aligned}$$

Ha most az u, v, w függvények elsőrendű parciális differenciálhányadosai helyébe a (8) alatti értéküket teszszük és azután a három egyenletet összeadjuk, akkor a következő adódik:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} &= \\ &= \frac{1}{\Delta^2} \left(P + Q + R - \frac{S}{\Delta} \frac{\partial \Delta}{\partial u} - \frac{T}{\Delta} \frac{\partial \Delta}{\partial v} - \Delta' \frac{\partial \Delta}{\partial w} \right), \end{aligned} \quad (9)$$

hol

$$\begin{aligned} P &= a \frac{\partial A}{\partial u} + \beta \frac{\partial B}{\partial u} + \gamma \frac{\partial C}{\partial u}, \quad Q = a \frac{\partial A}{\partial v} + b \frac{\partial B}{\partial v} + c \frac{\partial C}{\partial v}, \\ R &= A \frac{\partial A}{\partial w} + B \frac{\partial B}{\partial w} + C \frac{\partial C}{\partial w}, \\ S &= Aa + B\beta + C\gamma, \quad T = Aa + Bb + Cc. \end{aligned} \quad (10)$$

Így a $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}$ (9) alatti kifejezésében csak az (1) alatti x, y, z függvényeknek u, v, w szerinti differenciálhányadosai szerepelnek.

De éppen ez a (9) alatti kifejezés, abban az esetben, ha a (4) alatti feltételi egyenletek fennállanak, rendkívül egyszerűvé válik.

Ha ugyanis a $w=w(x, y, z)$ függvényt w szerint parciálisan differenciáljuk, a

$$\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial w} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial w} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial w} = 1$$

egyenlethez jutunk; ha ebben w -nek x, y, z szerint vett parciális differenciálhányadosai helyébe a (8) alatti értékeit tesszük és Δ -val szorzunk, akkor ez az egyenlet a (4) alatti feltételi egyenletekkel a következő egyenletrendszert alkotja:

$$\begin{aligned} A \frac{\partial x}{\partial w} + B \frac{\partial y}{\partial w} + C \frac{\partial z}{\partial w} &= \Delta, \\ \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial w} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial w} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial w} &= 0, \\ \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial w} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial w} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial w} &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Ennek a $\frac{\partial x}{\partial w}, \frac{\partial y}{\partial w}, \frac{\partial z}{\partial w}$ -re nézve lineár egyenletrendszernek determinánsa, ha a (6) alatti jelölésre tekintettel vagyunk, a következő:

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = A^2 + B^2 + C^2 = \Delta \Delta'.$$

Így nyerjük a (11) alatti egyenletrendszerből:

$$\frac{\partial x}{\partial w} = \frac{A}{\Delta'}, \quad \frac{\partial y}{\partial w} = \frac{B}{\Delta'}, \quad \frac{\partial z}{\partial w} = \frac{C}{\Delta'},$$

azaz

$$A = \Delta' \frac{\partial x}{\partial w}, \quad B = \Delta' \frac{\partial y}{\partial w}, \quad C = \Delta' \frac{\partial z}{\partial w}. \quad (12)$$

Szorozzuk most meg a (12) alatti egyenleteket sorban a, β, γ , illetőleg a, b, c -vel és adjuk őket össze, akkor látjuk, hogy

$$\begin{aligned} Aa + B\beta + C\gamma &= \Delta' \left(a \frac{\partial x}{\partial w} + \beta \frac{\partial y}{\partial w} + \gamma \frac{\partial z}{\partial w} \right) \equiv 0, \\ Aa + Bb + Cc &= \Delta \left(a \frac{\partial x}{\partial w} + b \frac{\partial y}{\partial w} + c \frac{\partial z}{\partial w} \right) \equiv 0. \end{aligned} \quad (13)$$

A zárójelben lévő kifejezések ugyanis azért zérusok, mert ezek a Δ determináns harmadik oszlopa elemeinek és az első, illetőleg második oszlop elemei adjungált aldeterminánsainak szorzataiból alkotott összegek.

Visszatérve már most a (10) alatti kifejezésekre, úgy ezek a (12) és (13) alatti egyenletek folytán a következő értékeket veszik fel:

$$\begin{aligned} P &= \Delta' \left(a \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial w} + \beta \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial w} + \gamma \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial w} \right) + \\ &\quad + \left(a \frac{\partial x}{\partial w} + \beta \frac{\partial y}{\partial w} + \gamma \frac{\partial z}{\partial w} \right) \frac{\partial \Delta'}{\partial u} \\ &= \Delta' \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial w} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial w} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial w} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} + 0, \\ Q &= \Delta' \left(a \frac{\partial^2 x}{\partial v \partial w} + b \frac{\partial^2 y}{\partial v \partial w} + c \frac{\partial^2 z}{\partial v \partial w} \right) + \\ &\quad + \left(a \frac{\partial x}{\partial w} + b \frac{\partial y}{\partial w} + c \frac{\partial z}{\partial w} \right) \frac{\partial \Delta'}{\partial v} \\ &= \Delta' \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial^2 x}{\partial v \partial w} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial^2 y}{\partial v \partial w} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial^2 z}{\partial v \partial w} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} + 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R &= \Delta' \left(A \frac{\partial^2 x}{\partial w^2} + B \frac{\partial^2 y}{\partial w^2} + C \frac{\partial^2 z}{\partial w^2} \right) + \\
 &\quad + \left(A \frac{\partial x}{\partial w} + B \frac{\partial y}{\partial w} + C \frac{\partial z}{\partial w} \right) \frac{\partial \Delta'}{\partial w} \\
 &= \Delta' \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial^2 x}{\partial w^2} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial^2 y}{\partial w^2} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial^2 z}{\partial w^2} \end{vmatrix} + \Delta \frac{\partial \Delta'}{\partial w},
 \end{aligned}$$

$$S = 0, \quad T = 0.$$

Már most azonnal belátjuk, hogy

$$\begin{aligned}
 P + Q + R &= \Delta' \frac{\partial}{\partial w} \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} + \\
 &\quad + \Delta \frac{\partial \Delta'}{\partial w} = \Delta' \frac{\partial \Delta}{\partial w} + \Delta \frac{\partial \Delta'}{\partial w}.
 \end{aligned}$$

Ha ezeket az értékeket a (9) alatti egyenletbe behelyettesítjük, akkor lesz:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \frac{1}{\Delta} \frac{\partial \Delta'}{\partial w};$$

ez pedig a (7) alatti egyenlet lévén, belőle a bebizonyítandó tétel helyessége is következik.

Mielőtt e tételnek potenciáleméleti alkalmazására áttérnénk, egy elemi példát kívánok bemutatni.

Legyenek az (1) alatti függvények a következők:

$$x = \frac{\cos u \cos v}{w}, \quad y = \frac{\cos u \sin v}{w}, \quad z = \frac{\sin u}{w}, \quad (1')$$

és döntsük el, hogy az u és v kiküszöbölése után nyert

$$w = w(x, y, z)$$

függvény eleget tesz-e az (5) alatti LAPLACE-féle differenciál-egyenletnek.

Az x, y, z függvényeknek elsőrendű parciális differenciál-bányadosai ezek:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u} &= -\frac{\sin u \cos v}{w}, & \frac{\partial x}{\partial v} &= -\frac{\cos u \sin v}{w}, & \frac{\partial x}{\partial w} &= -\frac{\cos u \cos v}{w^2}, \\ \frac{\partial y}{\partial u} &= -\frac{\sin u \sin v}{w}, & \frac{\partial y}{\partial v} &= \frac{\cos u \cos v}{w}, & \frac{\partial y}{\partial w} &= -\frac{\cos u \sin v}{w^2}, \\ \frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\cos u}{w}, & \frac{\partial z}{\partial v} &= 0, & \frac{\partial z}{\partial w} &= -\frac{\sin u}{w^2}. \end{aligned}$$

Ez értékek tekintetbe vételével egészen elemi számításokból nyerjük, hogy

$$\Delta = \frac{\cos u}{w^4} \quad \text{és} \quad A^2 + B^2 + C^2 = \frac{\cos^2 u}{w^4},$$

és így

$$\Delta' = \frac{A^2 + B^2 + C^2}{\Delta} = \cos u.$$

Minthogy tehát a Δ' a w -től független és a kiszámított differenciálhányadosokból következik, hogy az (1') alatti függvények a (4) alatti feltéti egyenleteknek is eleget tesznek, azért a w függvény a jelen esetben eleget tesz az (5) alatti LAPLACE-féle egyenletnek.

Hogy ez csakugyan megfelel a LAPLACE-féle egyenletnek, azt a jelen esetben más oldalról is beláthatjuk. Ugyanis az (1') egyenletekből:

$$w = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

és ennek a függvénynek ezt a tulajdonságát már a potenciálmélet elemeiből is ismerjük.

Végül e tétel segítségével a potenciálmélet egy igen jól ismert tételét fogom levezetni.

Legyenek x, y, z a tér valamely pontjának a DESCARTES-féle koordinátái és legyen bizonyos erőpotenciál:

$$w(x, y, z).$$

Oly térrészben, melyben hatóanyag nincsen, a w potenciál eleget tesz az (5) alatti differenciálegyenletnek. E térrésznek összes olyan pontjai, melyekben a potenciál értéke ugyanaz, egy felületet, ú. n. *nívófelületet* alkotnak.

Legyen egy tetszőleges ilyen nívófelület valamely paraméteres egyenletrendszer:

$$x = f_1(u, v), \quad y = f_2(u, v), \quad z = f_3(u, v),$$

akkor e felület minden (u, v) pontján áthalad a szóban levő térrész egy erővonala. Így az u, v paraméterek minden (u, v) értékpárjához egy-egy meghatározott erővonal és az egyes erővonalak minden pontjához egy meghatározott w potenciál tartozik.

A térbeli pontok helyzetét meghatározhatjuk tehát azzal, hogy megadjuk a potenciál értékét e pontban és azonkívül azokat az u, v parameterértékeket, melyek a ponton átmenő erővonalat meghatározzák. Mi tehát valamely pont DESCARTES-féle koordinátáit kifejezhetjük az ilyen módon választott (u, v, w) paraméterek által; még pedig legyen:

$$x = x(u, v, w), \quad y = y(u, v, w), \quad z = z(u, v, w). \quad (1'')$$

Ezek az egyenletek a w minden tetszőlegesen választott $w = w_0$ értékénél valamely nívófelület, és minden $u = u_0, v = v_0$ értékpárnál valamely erővonal paraméteres egyenleteit adják. Minthogy az összes erővonalak az összes nívófelületeket derékszög alatt metszik, azért az (1'') alatti x, y, z függvényekre nézve állanak a (4) alatti egyenletek; de egyúttal a w függvény eleget tesz az (5) alatti LAPLACE-féle differenciálegyenletnek is, és azért tételünk értelmében

$$\Delta' = \varphi(u, v)$$

csak az u és v parameter függvénye.

De (6) szerint

$$\Delta' = \frac{A^2 + B^2 + C^2}{A} = \sqrt{\frac{A^2}{A^2} + \frac{B^2}{A^2} + \frac{C^2}{A^2}} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}. \quad (14)$$

A (8) alatti egyenleteket tekintetbe véve:

$$\sqrt{\frac{A^2}{J^2} + \frac{B^2}{J^2} + \frac{C^2}{J^2}} = \sqrt{\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2} = N,$$

hol N , mivel $\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial y}$, $\frac{\partial w}{\partial z}$ az erőkomponenseket szolgáltatja, az (x, y, z) pontban működő erő.

A (14) alatti egyenlet tehát most így írható:

$$d' = N \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = \varphi(u, v).$$

Ebből most, ha $dudv$ -vel szorzunk, lesz:

$$N \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} dudv = \varphi(u, v) dudv. \quad (15)$$

A $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} dudv$ kifejezésnek egyszerű geometriai jelentése van. Ez t. i. a nivófelület oly elemi négyszögének a területe, a melynek csúcspontjaihoz tartozó paraméterek (u, v) , $(u+du, v)$, $(u, v+dv)$, $(u+du, v+dv)$. Ha ezt a felületelemet df -fel jelöljük, akkor a (15) alatti egyenlet a következőbe megy át:

$$Ndf = \varphi(u, v) dudv. \quad (16)$$

Ha most egy és ugyanazon erővonal két különböző helyén a működő erők N_1 és N_2 és a két nivófelület felületelemei df_1 és df_2 , akkor a (16) alatti egyenlet szerint

$$N_1 df_1 = N_2 df_2 = \varphi(u, v) dudv. \quad (17)$$

Határoljunk az egyik nivófelületen egy zárt görbe vonallal egy F_1 felületrészt, akkor a határán átmenő erővonalak egyrészt ú. n. erőcsövet határolnak, másrészt egy másik nivófelületből is kimetszenek egy határolt felületrészt F_2 -l.

Most integráljuk a (17) alatti egyenletet az F_1 és F_2 felületek egész kiterjedésére, illetőleg az (u, v) paraméterek oly értékeire nézve, melyek az erőcső belsejében lévő erővonalakra vonatkoznak; így

$$\int_{(F_1)} N_1 df_1 = \int_{(F_2)} N_2 df_2 = \int \int_{(u, v)} \varphi(u, v) dudv. \quad (18)$$

Ha most az $\int_{(F)} Ndf$ integrált a nivófelület F felületére eső erőmennyiségnek nevezzük, akkor a (18) alatti egyenlet kifejezi a potenciálemélet következő tételét:

Az egyes nivófelületeknek egy és ugyanazon erőcső belsejében fekvő részeire eső erőmennyiségek egymással mind egyenlők, feltéve, hogy az erőcső belsejében hatóanyag nincsen.

Privorszky Alajos.

A TRANSCENDENS EGÉSZ FÜGGVÉNYEK

NÖVEKEDÉSÉNEK VIZSGÁLATA KAPCSOLATBAN AZ ANALITIKAI
FÜGGVÉNYEK SZINGULARITÁSAINAK VIZSGÁLATÁVAL.

(Első közlemény).

Bevezetés.

A függvénytan egyik legfontosabb tárgya adott analitikai függvénynek oly előállítását adni egy analitikai kifejezéssel, mely lehetőleg nyilvánvalóvá tegye az általa ábrázolt függvény különböző sajátosságait. Különböző megoldásokat kíséreltek meg (TAYLOR-sor, CAUCHY integrál előállítása, RUNGE, PAINLEVÉ, MITTAG-LEFFLER-féle előállítások).

A MITTAG-LEFFLER-féle előállításokat vesszük vizsgálataink alapjául, még pedig az általuk ábrázolt analitikai függvény szingularitásainak szempontjából és az 1. §-ban példával mutatunk arra, hogy nem minden függvényelőállítás használható a szingularitások vizsgálatára, a 2. §-ban pedig rámutatunk a MITTAG-LEFFLER-féle egész függvényes¹ előállítások nagy fontosságára és kimutatjuk, hogy létezik egész csoportja az egész függvényeknek, melylyel függvényelőállítások képezhetők.

Ez előállítások nagyságrendjének meghatározására ismernünk kell az egész függvények nagyságrendjét és ezért a 3. §-ban áttérünk a TAYLOR-sorral adott egész függvények növekedésének vizsgálatára és LINDELÖF bizonyos egész függvények megközelítő értékének kiszámítására használt módszerének általánosításával bizonyítjuk alaptételeinket (3. és 4. §§.).

Az 5. §-ban az egész függvény differenciálhányadosának nagyságrendjét állapítjuk meg az egész függvény TAYLOR-sorá-

¹ A transcendens egész függvényeket a következőkben egyszerűen egész függvényeknek fogjuk nevezni.

nak ismeretéből és speciális érdekességű tételeket adunk az egész függvény növekedéséről.

Végül a 6. §-ban az addigi eredmények alapján az analitikai függvények algebrai logaritmikus szinguláris helyein megállapítjuk a MITTAG-LEFFLER-féle általános összeg nagyságrendjét és ennek meghatározására adunk egyszerű szabályt.

1. §. A függvényelőállítások vizsgálata a csillagtartomány határán levő szingularitások meghatározásának szempontjából.

1. Tudjuk, hogy MITTAG-LEFFLER-nek az analitikai függvények előállítására vonatkozó tétele alapján az

$$F(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + \dots$$

sorral definiált analitikai függvényt meghatározhatjuk a csillagtartomány belsejében levő bármely x_0 pontban.

DIENES P. és V.¹ vizsgálatai bizonyítják, hogy MITTAG-LEFFLER-féle előállításokkal a csillagtartomány határán levő szingularitások is tanulmányozhatók.

Alkalmas-e minden előállítás a szingularitások vizsgálatára?
Pontosabban, ha x_0 az $F(x)$ analitikai függvénynek a csillagtartomány határán levő szinguláris pontja és $M_\gamma(x)$ ezen függvény egy MITTAG-LEFFLER-féle ábrázolása, felmerül a kérdés, van-e összefüggés a

$$\lim_{\gamma=\infty} M_\gamma(x_0) \quad (\gamma)$$

sorozat és az x_0 pontban levő szingularitás alkata között?

Kimutatjuk, hogy ily összefüggés *nem mindig létezik.*

2. MITTAG-LEFFLER ad² oly előállítást, mely egyszerű alakja által arra a gondolatra vihet bennünket, hogy vele a szingu-

¹ DIENES P. és V.: Analitikai függvények algebrai és logaritmikus szingularitásairól. Matematikai és Fizikai Lapok. XX.

² MITTAG-LEFFLER: Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène. 4^e Note. Acta Math. 26. k. 388. old.

laritások vizsgálatánál a csillagtartomány határain ép. oly egyszerű és pontos összefüggéseket nyerhetünk, mint az összegezési sokszög kerületén levő szingularitások vizsgálatánál¹ az exponenciális összeggel.

Ezen előállítást MITTAG-LEFFLER a következőképen határozza meg:

Jelöljünk A -val egy a középponttal bíró csillagtartományt, α -val egy az egységnél kisebb pozitív mennyiséget, $\mathfrak{A}^{(\alpha)}$ -val egy az A -ba írt és A -val koncentrikus csillagtartományt, mely a $g(u|\alpha)$ származtató függvény által jött létre, a hol u oly kört ír le, melynek átmérője a 0-tól 1-ig terjedő egyenes vonal. Az $\mathfrak{A}^{(\alpha)}$ következőleg a $g(u|\alpha)$ megfelelő megválasztása után az $A^{(\alpha)}$ csillagtartomány körül írt csillag lesz ugyanazon származtató függvény segítségével, ha u oly kört ír le, melynek középpontja a és sugara 1. Mindig választható $g(u|\alpha)$ úgy, hogy elég kis α -nál $\mathfrak{A}^{(\alpha)}$ magába zárjon A belsejében levő minden tartományt és hogy $\alpha = 1$ -re $\mathfrak{A}^{(\alpha)}$ a BOREL-féle összegezési sokszög legyen. Mindig választható $g(u|\alpha)$ úgy, hogy A lévén a CAUCHY-feltételeknek alávetett $F(a)$, $F^{(1)}(a)$, ..., $F^{(n)}(a)$ konstansoknak főcsillagtartománya az

$$M_\gamma(x) = \lim_{\gamma=\infty} e^{-\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} \left[F(a) + \frac{\alpha_{1n}(\alpha)}{1!} F^{(1)}(a)(x-a) + \dots + \frac{\alpha_{1n}(\alpha)}{n!} F^{(n)}(a)(x-a)^{(n)} \right] \frac{\gamma^{n+1}}{(n+1)!} \quad (A)$$

kifejezésnek, a hol

$$\alpha_{\mu n}(\alpha) \begin{bmatrix} \mu = 1, 2, \dots, n \\ n = 1, 2, \dots, \infty \end{bmatrix}$$

meghatározott csak a származtató függvénytől függő pozitív állandók, melyek eleget tesznek a következő két feltételnek

$$\begin{aligned} \alpha_{\mu n}(1) &= 1 \\ \lim_{n=\infty} \alpha_{\mu n}(\alpha) &= 1, \end{aligned}$$

¹ DIENES P. és V.: Id. 186. oldal.

van konvergencia csillagtartománya, mely identikus $\mathfrak{A}^{(\alpha)}$ -val és ezen $\mathfrak{A}^{(\alpha)}$ belsejében áll

$$FA(x) = \lim_{\gamma=\infty} M_{\gamma}(x).$$

Vegyük származtató függvénynek ¹

$$g(u|\alpha) = \frac{au}{\left(1 - \frac{u}{R}\right)} \quad \frac{1}{R} = 1 - \alpha^{\frac{1}{\alpha}}$$

függvényt. Ez esetben ²

$$\begin{aligned} a_{\mu n}(\alpha) = & \alpha^{\mu} \left[1 + \frac{\alpha}{1!} (1 - \alpha^{\frac{1}{\alpha}}) + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2!} (1 - \alpha^{\frac{1}{\alpha}})^2 + \dots + \right. \\ & \left. + \frac{\alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+n-\mu-1)}{(n-\mu)!} (1 - \alpha^{\frac{1}{\alpha}})^{n-\mu} \right]. \end{aligned} \quad (1)$$

3. Legyen a vizsgált függvény

$$F(x) = \frac{1}{1-x}$$

és a csillagtartomány középpontja $\alpha=0$. Az $x=1$ az $F(x)$ -nek elsőrendű pólusa és az $F(x)$ csillagtartományából kizárt fél-egyenes kezdőpontjában van és

$$F(0) = \frac{1}{1!} F^{(1)}(0) = \dots = \frac{1}{n!} F^{(n)}(0) = 1.$$

Az (A) előállítás az $x=1$ helyen

$$FA(1) = \lim_{\gamma=\infty} e^{-\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} \left[1 + a_{1n}(\alpha) + \dots + a_{\mu n}(\alpha) + \dots + a_{nn}(\alpha) \right] \frac{\gamma^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$\begin{aligned} S(n) &= \alpha_{1n}^{(\alpha)} + \alpha_{2n}^{(\alpha)} + \dots + \alpha_{\mu n}^{(\alpha)} + \dots + \alpha_{nn}^{(\alpha)} \\ s_{\mu} &= 1 + \frac{\alpha}{1!} (1 - \alpha^{\frac{1}{\alpha}}) + \dots + \frac{\alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+n-\mu-1)}{(n-\mu)!} (1 - \alpha^{\frac{1}{\alpha}})^{n-\mu} \end{aligned}$$

¹ MITTAG-LEFFLER : 4. Note 366. old.

² MITTAG-LEFFLER : 4. Note 368. old.

Mivel

$$a_{\mu n}(\alpha) = a^\mu \left[1 + \frac{\alpha}{1!} (1 - a^{\frac{1}{\alpha}}) + \dots + \frac{\alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+n-\mu-1)}{(n-\mu)!} (1 - a^{\frac{1}{\alpha}})^{n-\mu} \right]$$

azért írható

$$S(n) = \alpha s_1 + \alpha^2 s_2 + \dots + \alpha^\mu s_\mu + \dots + \alpha^{n-1} s_{n-1} + \alpha^n s_n.$$

Mivel továbbá

$$s_n < s_{n-1} < \dots < s_1$$

azért

$$S(n) < s_1 (\alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^n) \\ \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^n = \frac{\alpha - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha}$$

és így

$$S(n) < s_1 \frac{\alpha}{1 - \alpha}$$

De

$$s_1 = 1 + \frac{\alpha}{1!} (1 - a^{\frac{1}{\alpha}}) + \dots + \frac{\alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+n-2)}{(n-1)!} (1 - a^{\frac{1}{\alpha}})^{n-1} = \\ = \sum_{m=0}^{n-1} \binom{\alpha+m-1}{m} (1 - a^{\frac{1}{\alpha}})^m < \sum_{m=0}^{\infty} \binom{\alpha+m-1}{m} (1 - a^{\frac{1}{\alpha}})^m$$

mert az együtthatók pozitívak.

Azonban

$$\sum_{m=0}^{\infty} \binom{\alpha+m-1}{m} (1 - a^{\frac{1}{\alpha}})^m = \frac{1}{[1 - (1 - a^{\frac{1}{\alpha}})]^\alpha} = \frac{1}{a}$$

vagyis

$$s_1 < \frac{1}{a}$$

következésképpen

$$S(n) < \frac{1}{1 - a}.$$

Tehát

$$FA(1) \leq \lim_{\gamma \rightarrow \infty} e^{-\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1 - a} \frac{\gamma^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{1}{1 - a}.$$

Látjuk, hogy míg az $F(x)$ függvény az $x=1$ helyen végtelenné válik, addig ezen függvénynek MITTAG-LEFFLER-féle (A) előállítás az $x=1$ pontban véges értéket ad.

4. Vajjon nem jellemző-e ez az elsőrendű pólusra? Talán, ha magasabb rendű pólussal bíró függvényre képezzük az (A) kifejezést, ennek végtelenné válása mutat törvényszerűséget, mely jellemző a különböző rendű pólusokra.

Legyen

$$F(x) = \frac{1}{(1-x)^k} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(k)} x^n$$

F jelenti a k -hoz tartozó n . binomiális együtthatót.

$$B_n^{(k)}(0) = 1, \quad \frac{1}{1!} F^{(1)}(0) = B_1^{(k)}, \quad \frac{1}{2!} F^{(2)}(0) = B_2^{(k)}, \dots,$$

$$\frac{1}{n!} F^{(n)}(0) = B_n^{(k)}$$

A) kifejezés most a következő alakú:

$$FA(1) = \lim_{\gamma \rightarrow \infty} e^{-\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} [1 + a_{1n} B_1^{(k)} + \dots + a_{\mu n} B_{\mu}^{(k)} + \dots + a_{nn} B_n^{(k)}] \frac{\gamma^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Legyen

$$S(n) = a_{1n} B_1^{(k)} + \dots + a_{\mu n} B_{\mu}^{(k)} + \dots + a_{nn} B_n^{(k)}.$$

Ismeretes, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{B_n^{(k)}}{n^{k-1}} = \frac{1}{\Gamma(k)}$$

vagyis

$$B_n^{(k)} = cn^{k-1} + p(n) \quad c = \frac{1}{\Gamma(k)}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p(n)}{n^{k-1}} = 0.$$

$B_n^{(k)}$ értékét $S(n)$ -be téve

$$S(n) = a_{1n} [c + p(1)] + \dots + a_{\mu n} [c\mu^{k-1} + p(\mu)] + \dots + \\ + a_{nn} [cn^{k-1} + p(n)] = c[a_{1n} + 2^{k-1}a_{2n} + \dots + n^{k-1}a_{nn}] + \\ + [a_{1n}p(1) + \dots + a_{\mu n}p(\mu) + \dots + a_{nn}p(n)] = ch(a) + h_1(a)$$

a hol

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{h_1(a)}{h(a)} = 0.$$

Elég tehát $h(a)$ növekedését vizsgálni. Az előbbi példánál használt jelöléssel

$$h(a) = as_1 + 2^{k-1}a^2s_2 + \dots + n^{k-1}a^ns_n < \\ < s_1[a + 2^{k-1}a^2 + \dots + n^{k-1}a^n] \\ a + 2^{k-1}a^2 + \dots + n^{k-1}a^n = e^{\log a} + e^{(k-1)\log 2 + 2\log a} + \dots + \\ + e^{(k-1)\log n + n\log a} = e^{\log a} + e^{2\left[\frac{(k-1)\log 2}{2} + \log a\right]} + \dots + \\ + e^{n\left[\frac{(k-1)\log n}{n} + \log a\right]} < e^{\log a} + e^{2\left[\frac{(k-1)\log p}{p} + \log a\right]} + \dots + \\ + e^{n\left[\frac{(k-1)\log p}{p} + \log a\right]},$$

a hol p jelenti n azon értékét, melyre $\frac{\log n}{n}$ maximális.

p véges szám, mert $\frac{\log n}{n}$ fogyó függvény; u. i. differenciálhányadosa

$$\frac{d}{dn} \frac{\log n}{n} = -\frac{\log n}{n} + \frac{1}{n^2}$$

bizonyos értékektől kezdve negatív.

$$\left[\frac{(k-1)\log p}{p} + \log a\right]\text{-t } c_1\text{-gyel jelölve}$$

$$a + 2^{k-1}a + \dots + n^{k-1}a^n < e^{c_1} + e^{2c_1} + \dots + e^{nc_1} = \frac{e^{c_1} - e^{(n+1)c_1}}{1 - e^{c_1}};$$

a mindig választható oly kicsinyre, hogy

$$c_1 < 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} e^{(n+1)c_1} = 0.$$

Előbbiekből tudjuk, hogy

$$s_1 < \frac{1}{a}$$

tehát

$$h(a) < \frac{1}{a} \frac{e^{c_1}}{1 - e^{c_1}}.$$

Mivel $h_1(a)$ rendje kisebb, mint $h(a)$ rendje

$$S(n) < C$$

C véges szám, következőleg

$$FA(1) \leq \lim_{\gamma \rightarrow \infty} e^{-\gamma} \sum_{n=1}^{\infty} G \frac{\gamma^{n+1}}{(n+1)!} = c$$

c véges szám.

Látjuk, hogy (A) előállítás k -ad rendű pólusban is véges értéket ad.

5. Ha

$$\begin{aligned} F(x) &= \log \frac{1}{1-x} \\ &= \sum_1^{\infty} \frac{x^n}{n} \end{aligned}$$

akkor, mivel

$$F(0) = 0, \quad \frac{1}{1!} F^{(1)}(0) = 1, \quad \frac{1}{2!} F^{(2)}(0) = \frac{1}{2}, \dots, \quad \frac{1}{n!} F^{(n)}(0) = \frac{1}{n}$$

$$S(n) = a_{1n} + \frac{a_{2n}}{2} + \dots + \frac{a_{nn}}{n} = as_1 + \frac{a^2 s_2}{2} + \dots + \frac{a^n s_n}{n} <$$

$$< s_1 (a + a^2 + \dots + a^n) < \frac{1}{a}.$$

Tehát ez esetben is

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} e^{-\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} \left[F(0) + a_{1n}(0) + \dots + F^{(n)}(0) \frac{a_{nn}}{n!} \right] \frac{\gamma^{n+1}}{(n+1)!} = c$$

c véges szám.

Általában ha

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

következő alakban írható

$$F(x) = \frac{A_r \left[\log \left(\frac{1}{1-x} \right) \right]}{(1-x)^k} + F_1(x),$$

ahol $A_r(a)$ r -ed rendű polinóm a -ban, továbbá $F_1(x)$ rendje $k_1 < k$; az $x = 1$ (r, k) -ad rendű algebrai logaritmikus pont az $F(x)$ csillagtartományából kizárt valamelyik félegyenes kezdő-pontjában van, ezen $x = 1$ pontban képezve (A) kifejezést

$$FA(1) = \lim_{\gamma=\infty} e^{-\gamma} \sum_{n=\infty}^{\infty} [a_0 + a_{1n}a_1 + \dots + a_{nn}a_n] \frac{\gamma^{n+1}}{(n+1)!} = \text{konst.}$$

A bizonyítás menete analog az egyszerűbb példáknál követett bizonyítással: azért csupán röviden vázoljuk. a_n mindenestre $< B_n^{(r+k)}$, a hol $B_n^{(r+k)}$ az $(r+k)$ -hoz tartozó n -dik binomiális együtthatót jelenti; mivel

$$\lim_{n=\infty} \frac{B_n^{(r+k)}}{n^{r+k-1}} = \frac{1}{\Gamma(r+k)}$$

$$\begin{aligned} S(n) &< a s_1 + a^2 s_2 2^{r+k-1} + \dots + a^n s_n n^{r+k-1} < \\ &< s_1 \left[e^{\log \alpha} + e^{2 \left[\log \alpha + \frac{(r+k-1) \log 2}{2} \right]} + \dots + e^{n \left[\log \alpha + \frac{(r+k-1) \log n}{n} \right]} \right] < \\ &< s_1 \left[e^{\log \alpha} + e^{2 \left[\log \alpha + \frac{(r+k-1) \log p}{p} \right]} + \dots + e^{n \left[\log \alpha + \frac{(r+k-1) \log p}{p} \right]} \right] = \\ &= s_1 [e^{c_2} + e^{2c_2} + \dots + e^{nc_2}] = s_1 \frac{e^{c_2} - e^{(n+1)c_2}}{1 - e^{c_2}} \end{aligned}$$

s_1, \dots, s_n , úgyszintén p jelentése ugyanaz, mint az előző példáknál,

$$c_2 = \frac{(r+k-1) \log p}{p}$$

a választható oly kicsinyre, hogy $c_2 < 0$, úgy, hogy

$$\lim_{n=\infty} e^{(n+1)c_2} = 0.$$

Látnivaló, hogy

$$S(n) < \frac{1}{a} \frac{e^{c_2}}{1 - e^{c_2}}$$

vagyis, hogy

$$FA(1) = k$$

k véges szám.

Tehát a tárgyalt esetekben a míg a vizsgált analitikai függvények végtelenné válnak az $x = 1$ helyen, addig ezen függvények (A) alakú MITTAG-LEFFLER-féle előállítása ugyanazon helyen véges értéket ad.

E példák eléggé mutatják, mennyire fontos a szingularitások vizsgálatára a függvényt ábrázoló analitikai kifejezés helyes megválasztása.

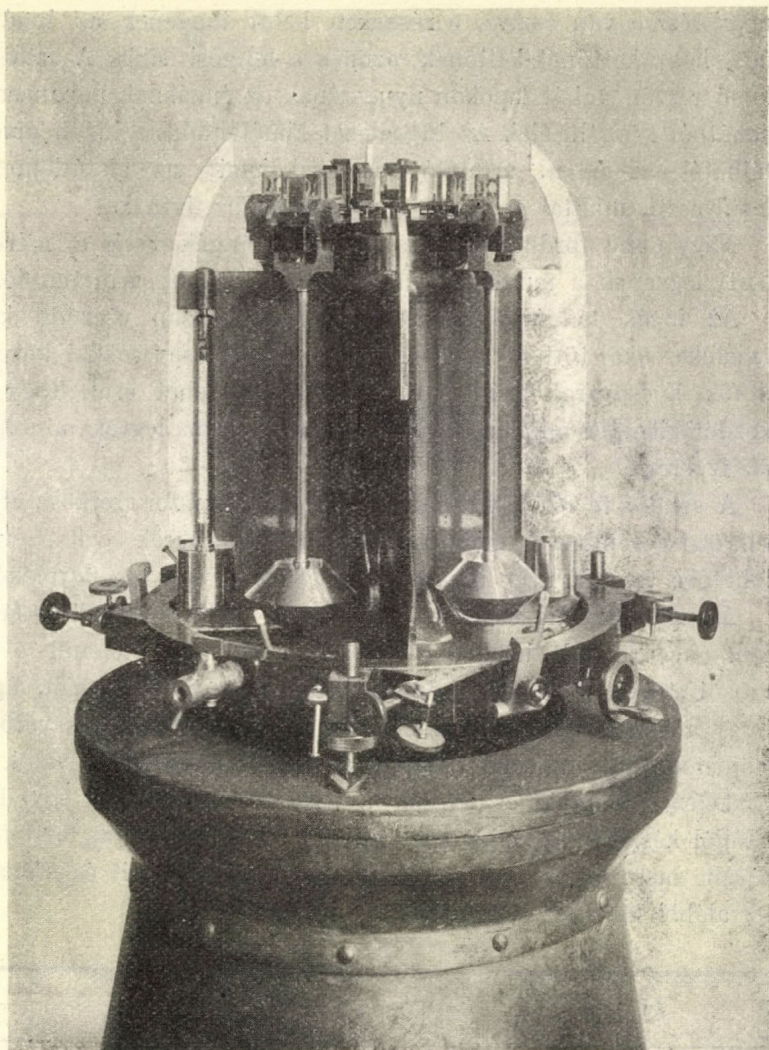
Tillinger Istvánka.

A NAGY MAGYAR ALFÖLDÖN, A MEZŐSÉGEN ÉS A GYERGYÓI FENSÍKON VÉGZETT NEHÉZSÉG- GYORSULÁS-MÉRÉSEIM VÉGEREDMÉNYEI.

Báró EÖTVÖS LORÁND ő nagyméltósága megbízásából geofizikai kutatásai céljaira az 1908., 1911. és 1913. években Magyarországon több helyen végeztem nehézséggyorsulás-méréseket invariabilis ingák lengési idejének megfigyelésével. A nehézséggyorsulás-mérések relatívok voltak. Abszolút értékeket levezeztendő az 1908. évi mérésbe bevontam Potsdamot is, a hol a Geodéziai Intézet a legnagyobb gonddal állapította meg a nehézséggyorsulás abszolút értékét. A potsdami és budapesti észlelésekből legelőször is a budapesti állomás abszolút értékét veztettem le. Az erre vonatkozó mérések leírását a Magyar Tudományos Akadémia kiadásában megjelenő Matematikai és Természettudományi Értesítőben tettem közzé.¹ Az 1911. és 1913. évi relatív méréseket már ehhez az új állomáshoz kapcsoltam. (A külső állomások észlelése előtt és után Budapesten történtek a kapcsoló mérések.)

A következőkben közzétenni szándékozom a külső állomásokra vonatkozó gravitáció-méréseim végeredményeit is abból a célból, hogy azok a részletes publikáció előtt is tudományos és egyéb célokra hozzáférhetők legyenek. Ez alkalomból szükségesnek tartom bemutatni és röviden leírni a műszereket, továbbá ismertetni a követett mérési eljárást.

¹ XXIX. kötet, 1. füzet, (229. l., 1911) Nehézséggyorsulás-mérések Budapesten. OLTAY KÁROLYTÓL.



1. ábra.

A relatív ingamérésekhez egy a potsdami Geodéziai Intézet modellje után STÜCKRATH friedenaui mechanikus műhelyében készült négyingás műszert használtam. (1. ábra.)

A három talpesavaron nyugvó súlyos sztatív válaszfalakkal

négy részre van osztva, e részeken belül lengenek az ingák, úgy hogy kettőnek-kettőnek azonos a lengési síkja. A sztativ felső részén achát lapokon nyugszanak az ingáknak ugyancsak achátból készült élei. Az ingaéleket kimélendő, az ingák arretálhatók az ú. n. arretáló csavarral, mely az alátétlemezt lesülyeszti, miáltal az ingák a pihenő élekre jutnak.

Nagy gond fordítandó arra, hogy az ingák csak a mérés alatt legyenek a munkaéleken, különben mindig arretálандók.

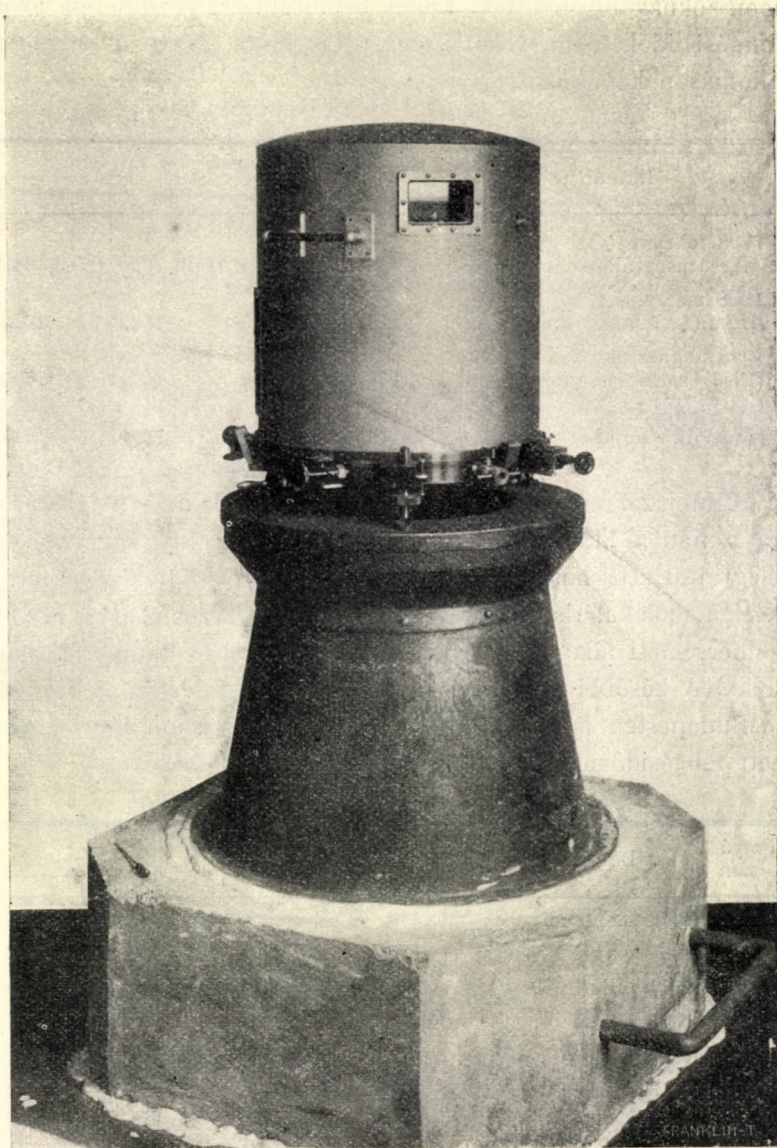
Az ingák lengésbe hozatala csontfoglatban végződő kis emelőkarokkal történt, melyek az amplitudo-csavarokkal kezelhetők. E csavarok beállíthatók, a mivel el lehet érni, hogy a kezdeti kilengés minden ingánál mindig egyforma legyen (mintegy 25 ívpercz).

A sztativ felső részén van a BORRAS professzor szerkesztette tükröző berendezés, mely az ingákon levő tükrök segítségével lehetővé teszi a négy ingának egy irányból való megfigyelését.

Az egész sztativ a mérés alatt légzáró módon egy kettős falú fémhengerrel volt lefedve (2. ábra), a mi kétségtelenül előmozdította a belső tér hőmérsékletének egyenletességét, úgy hogy a belső térben levő hőmérők a lehetőségig az ingák valódi hőmérsékletét mutatják. Maguk az ingák sárgarézből valók s nikkelezve vannak. A lencsé, a szár és a felső rész egy darabból készült, az achattest, melyen a lengő él van, a felső részbe mereven be van préselve. Az ingák méreteit és súlyait az alábbi táblázat adja meg:

Az inga	Az inga száma			
	115	112	113	114
Súly grammban	1269	1249	1285	1256
Súlypont-távola mm-ben	210 0	208 0	210 0	208 3
Fajsúly	7 88	7 88	7 88	7 88

A koincidencia-időköz minden ingánál kb. 3 percz. A mérés jósága szempontjából igen fontos, hogy a mérés alatt az ingák invariabilisak maradjanak. Ingáink ebben a tekintetben



2. ábra.

igen jóknak bizonyultak. Ennek bemutatására közölhetem azon lengési időket, melyeket az egyes ingákra nézve a potsdami állomáson kaptam.

Dátum	Redukált lengési idő mp-ben			
	115	113	112	114
1908 február (Légsűrűségi állandó meghat.)	0·501 1456	0·501 0716	0 501 1620	0·501 1649
1908 márczius (Hőmérs. állandó meghat.)	1423	0688	1623	1619
1908 augusztus (Első csatlakozó mérés)	1439	0692	1611	1605
1909 január (Második csatlakozó mérés)	1435	0694	1620	1614

A táblázat adatai szerint a légsűrűségi állandó meghatározása után a 112. számú ingát kivéve, valamennyi inga erősen megváltoztatta hosszát és pedig mind megrövidültek, a mi megfelel a molekuláris összehúzódásnak. Az összehúzódás oka a hőmérsékleti állandó meghatározását megelőző temperálásban rejlik. A későbbi változások már kisebbek s véletlen jellegűek.

Budapesten is rendelkezésre áll több ugyanazon helyen végzett lengésidőmérés, melyek eredményei a következők:

Folyó- szám	Dátum	Redukált lengési idő mp-ben			
		115	113	112	114
1	1908 szeptember	0·501 2516	0·501 2696	0·501 1786	0·501 2686
2	1909 január	2507	2703	1774	2693
3	1911 július	2503	2703	1750	2689
4	1912 február	2512	2695	1769	2671
5	1913 április	2497	2695	1759	2661
6	1913 szeptember	2506	2707	1768	2670
	Közép	2507	2700	1768	2678

Vagyis a középtől való eltérések az egyes ingáknál a másodperc tizmilliomod részében kifejezve a következők:

Folyó- szám	Eltérés a középtől			
	115	113	112	114
1	— 9	+ 4	— 18	— 8
2	0	— 3	— 6	— 15
3	+ 4	+ 5	+ 18	— 11
4	— 5	+ 5	— 1	+ 7
5	+ 10	— 3	+ 9	+ 17
6	+ 1	— 7	0	+ 8

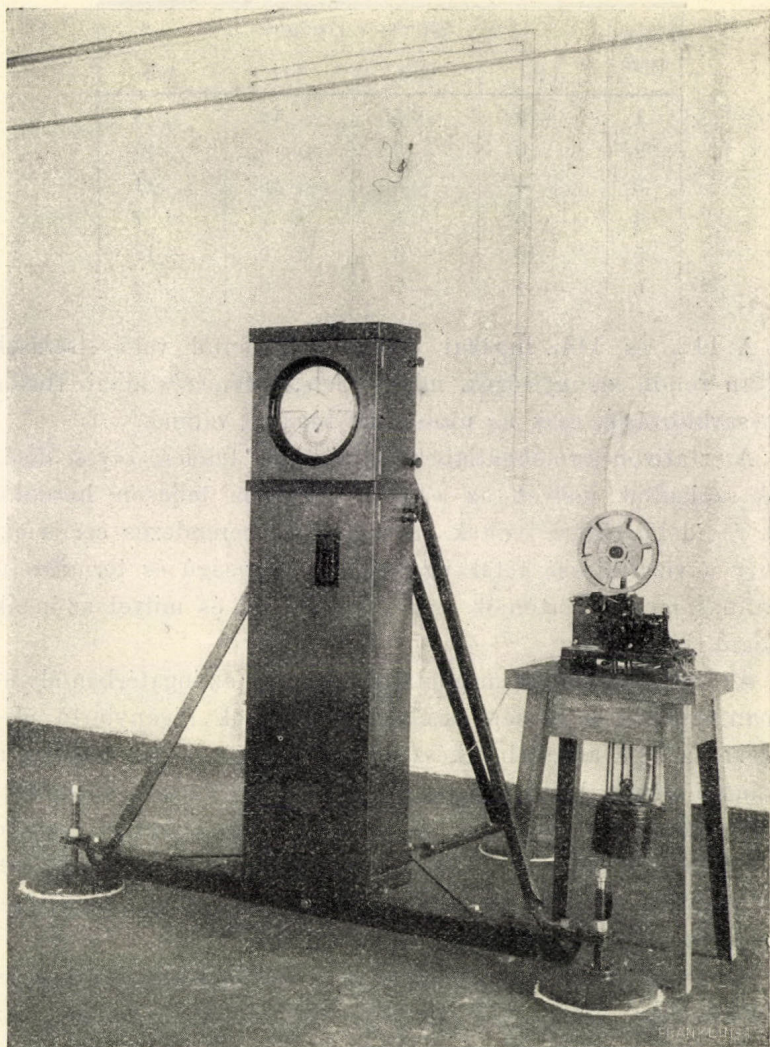
A 112. és 114. ingákat kivéve a középtől való eltérések olyan rendű mennyiségek, mint a lengésidőmérés hibái. Realis hosszváltozások csak az utolsó két ingánál vannak.

A sztativon levő achátlapok vízszintessé tételére olyan libellák szolgáltak, melyek az eredeti ingákhoz teljesen hasonló, de rövidebb ingára voltak ráerősítve. E berendezés célja az, hogy a vízszintessé tétel ugyanolyan nagyságú és természetű nyomás mellett történjék, mint a mekkorát és milyet az ingák maguk kifejtenek.

Az ingahőmérséklet meghatározására két, az ingatérben állandóan elhelyezett hőmérő szolgált, melyeknek higanytartó edényeik az inga anyagából készült testbe nyúlnak be. Ezáltal a hőmérő nem a belső térnek, de az inga testének a hőmérsékletét mutatta. A kapilláris cső maga az inga szárához hasonló s az inga anyagából készült csőburkolattal volt körülvéve. A hőmérők közvetlen $\frac{1}{5}$ fokra voltak beosztva; becsléssel 0.02 fok olvasható le róluk.

A lengési idő megfigyelése a koincidenciamódszerrel történt. Az 1908. évi mérések egy fél-másodperczes, az 1911. és az 1913. évi észleléseknél egy másodperczes ingaórát használtam, mind a kettő STRASSER és ROHDE glashüttei czégnél készült. A 3. ábra ezt az utóbbit mutatja be a MORSE-rendszerű chronograffal, mely az idő meghatározásához használtatott.

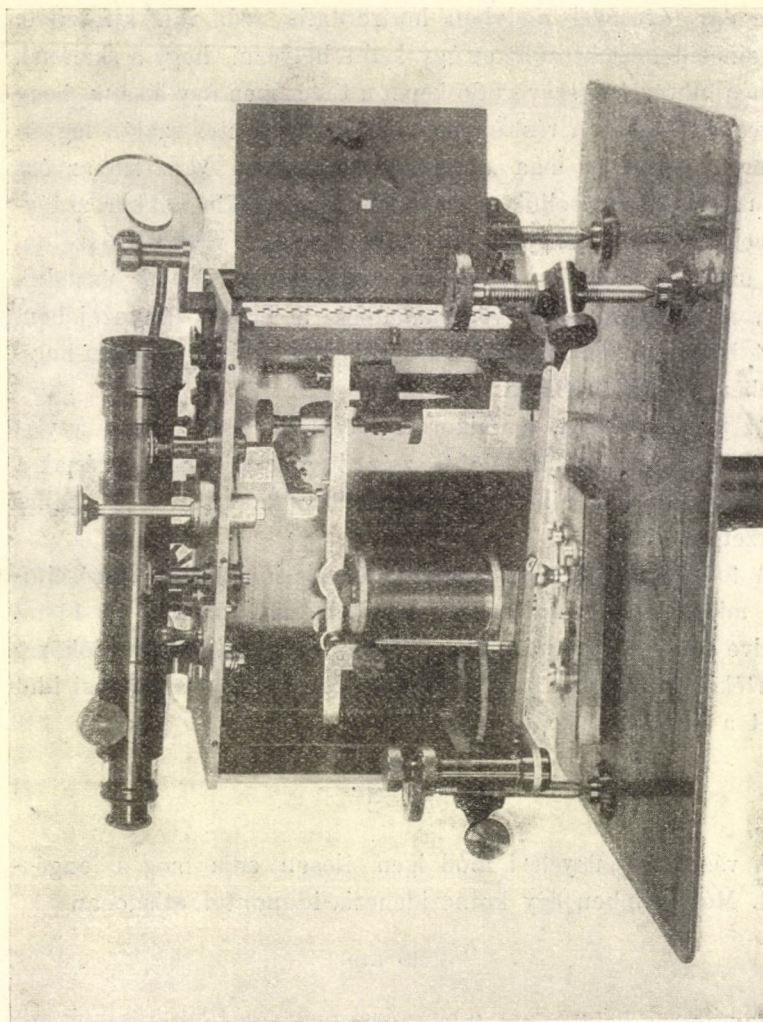
A mérésnél meg kellett figyelni, mikor kerül az inga és az ingaóra ingája ugyanabba a helyzetbe. Ennek a megfigyelésére



3. ábra.

a STERNECK-féle koincidencia-készülék szolgált. (4. ábra.). Lényeges része egy elektromágnes, mely bekapcsolható az óra áramkörébe. Mikor az óra kontaktust ad, az elektromágnes leránt egy kart, melynek végén egy vízszintes nyílással ellátott

lemez van. Ez a lemez ugyancsak vízszintes nyílással ellátott fix lemez előtt mozog. A mint a két nyílás fedésbe jutott, egy



4. ábra.

oldalt elhelyezett fényforrás sugarai keresztül hatolhatnak rajtuk. Ha tehát szembe nézünk a fix lappal, minden kontaktus alkalmával felvillanó fényjelet látunk. E berendezéssel az óra

másodperczei fényjelekre vannak áttanszformálva. A fix lemez síkján egy skála van elhelyezve, úgy hogy 0 vonása összeesik a lemez előbb említett részével. A koincidenciakészülék el van látva egy távcsővel, melyben horizontális szál van kifeszítve. A koincidenciakészüléket úgy kell elhelyezni, hogy a skálának az inga tükréről visszaverődő képét a távcsőben úgy lássuk, hogy a 0 vonás (vagyis a rés) éppen a távcső vízszintes szálán legyen akkor, a mikor az inga nyugalmi helyzetben van. Ha az óra áramkörét bekapcsoljuk a megfigyelőkészülékbe, akkor a távcsőben felvillanó fényjeleket látunk mindig a vízszintes szálon. Ha most az ingát is mozgásba hozzuk, azt fogjuk észlelni, hogy a felvillanó jelek végighaladnak a távcső látmezejében, mert hiszen a fénysugarak a mozgó tükörnek mindig más helyzetében verődnek vissza.

Az az időpillanat, a mikor a felvillanó fény éppen a vízszintes szálon halad át, jelenti az óra ingájának és az ingának a koincidenciáját, mind a kettő ezen időpillanatban a nyugalmi helyzetben van.

A feladat megfigyelni a koincidencia-időközöket. Méréseimben mindig 6 koincidenciát figyeltem meg s aztán a 11-től kezdve ismét 6-ot, a mi által a 10-szeres koincidencia-időközre 6 értéket kaptam. A koincidencia-időközből (c) a lengési időt « t »-t a következő képlet adja:

$$t = \frac{1}{4c-2}. \quad (1)$$

A vázolt megfigyelési mód igen élesen adja meg a lengési időt. Méréseimben egy koincidencia-időpontot átlagosan

$$\pm 0.28 \text{ mp}$$

középhibával határoztam meg, mivel pedig a 10-szeres koincidencia-időközt 6-szoros ismétléssel mértem meg, a koincidencia-időköz középhibája:

$$\pm 0.011 \text{ mp}$$

-nek adódott ki.

Az (1) képlet szerint a lengésidő Δt hibája is a koincidenzia-időköz Δc hibája közt az összefüggés:

$$\Delta t = - \frac{1}{(2c-1)^2} \Delta c,$$

azért a fenti középhiba a lengési időben magában

$$\pm 0.8 \times 10^{-7} \text{ mp-et}$$

tesz ki, vagyis a lengési időt ez a módszer $1/10000000$ mp-re pontosan adja meg.

A mérési eredményül nyert t' lengési időt a következő képlettel redukáltam 0° hőmérsékletre, 760 mm légnyomásra, végtelen kis amplitudóra, csillagidőre és szilárd alátámasztásra:

$$t = t' - c_a a - c_d d - c_\tau \tau - c_g g + m,$$

a hol a az ingának az észlelés alatti közepes amplitudója,

d az észlelés alatti közepes relativ légsűrűség vonatkoztatva 0° -ú, 760 mm nyomású száraz levegőre, mint egységre,

τ az ingáknak az észlelés alatti közép hőmérséklete Celsius-fokban,

g az óra napi járása csillagidő-másodperczben,

m az alátámasztás együtt lengése miatti korrekció.

A c -vel jelölt mennyiségek állandók és pedig:

c_a az amplitudo állandó,

c_d a légsűrűségi állandó,

c_τ a hőmérsékleti állandó,

c_g az órajárás állandója.

Az ingák hőmérsékleti és légsűrűségi állandóit empirikus eljárásokkal a potsdami Geodéziai Intézetben határoztam meg, felhasználva az ott e célra rendelkezésre álló berendezéseket. Ezek az állandók az egyes ingákra a következőknek adódtak ki:

	Hőmérsékleti állandó	Légsűrűségi állandó
115. sz. inga	48.24×10^{-7} sec pro 1° Cels.	650×10^{-7} sec pro lég-sűrűség egység
113. sz. inga	46.67	657
112. sz. inga	47.76	665
114. sz. inga	48.12	666

A hőmérsékleti állandók középhibája ± 0.09 , a légsűrűségi állandó pedig ± 4.3 .

Az ingák úgynevezett *dinamikus hőmérsékleti együtthatóját* is meghatároztam. A hőmérséklet mérése ugyanis higanyhőmérőkkel történik, ezek pedig az inga valódi hőmérsékletét csak akkor mutatják helyesen, ha a hőmérséklet egyenletes. A mint a hőmérséklet változik, akkor a higanyhőmérő előbb veszi fel a változást, mint az inga maga s így változó hőmérsékletnél a higanyhőmérők mutatta hőmérséklet nem az ingák valódi hőmérséklete. Legyen $\Delta\tau$ az egy óra alatt bekövetkezett hőmérsékletváltozás Celsius-fokokban kifejezve. Legyen továbbá $c_{\Delta\tau}$ a dinamikai hőmérsékleti együttható, akkor a lengési idő megjavítandó

$$\Delta\tau c_{\Delta\tau}$$

értékkel.

A $c_{\Delta\tau}$ jelenti azt a javítást, a mely szükséges, ha a hőmérséklet egy óra alatt 1 Celsius-fokkal változik. Kísérleteim alapján ingáimnál ez az érték

$$35.2 \times 10^{-7} \text{ mp-et}$$

tesz ki.

A dinamikai hőmérsékleti együtthatót csak ott vettem tekintetbe, a hol nagyobb hőmérsékletváltozások voltak (sátor-észleléseknél).

Az alátámasztás együttlengésének meghatározását igen megkönnyebbitette az a körülmény, hogy a műszeren két-két inga egymással szemben lengett. Az egyik ingát teljesen lecsende-

sítve, a másikat pedig nagy amplitudóval mozgásba hozva — mivel rövid idő múlva a támasz mozgásba jött és lengésbe hozta a nyugalomban volt ingát is — csak a két inga kilengéseit kellett ugyanazon időpillanatokban meghatározni. A kilengések arányából vezettem le az állvány mozgása miatti korrekciót, «*m*»-et.

Méréseimben az *m* átlagos értéke 68×10^{-7} sec volt, a maximális értéke 118×10^{-7} sec (Makón), a minimális értéke 44×10^{-7} sec (Szeged); az átlagostól való legnagyobb eltérés tehát

$$40 \times 10^{-7} \text{ sec-ot}$$

tesz ki. Ha ezt elhanyagolnók úgy a nehézséggyorsulásba Δg hibát követnénk el és pedig ez

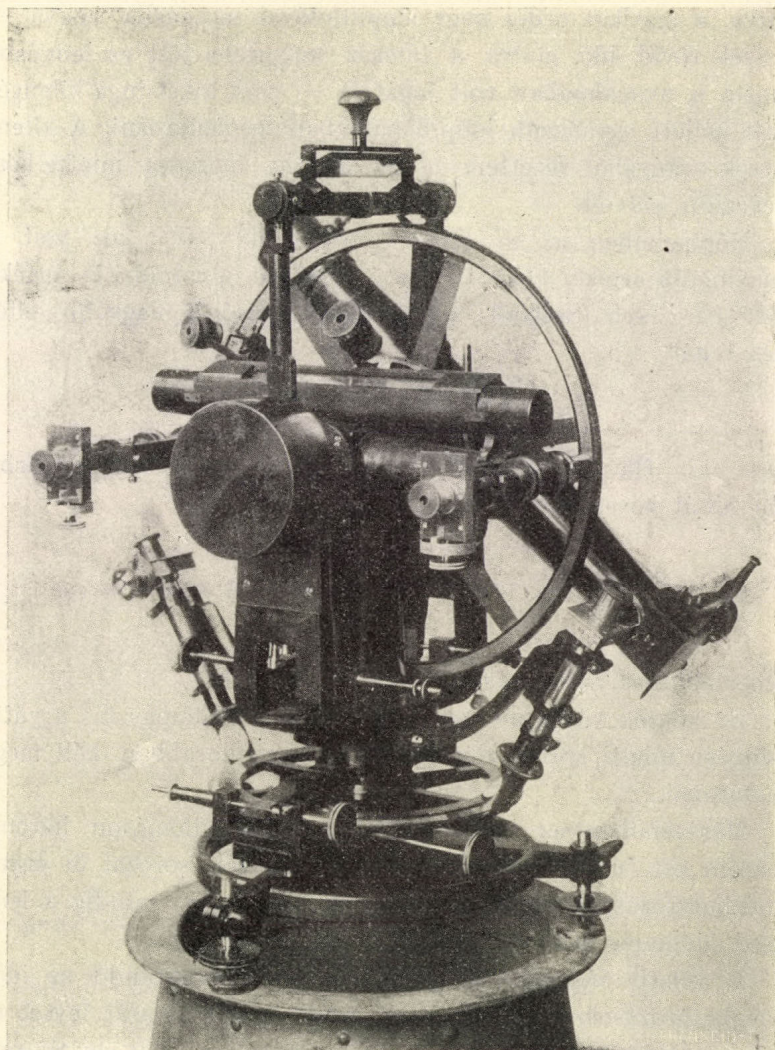
$$\Delta g = \frac{2 \times 9.81}{0.502} \times 40 \times 10^{-7} \text{ m sec}^{-2} = 16 \times 10^{-5} \text{ m sec}^{-2}$$

azaz a *g*-nek $\frac{1}{60000}$ része.

Ez adatok világosan mutatják, hogy az alátámasztás együttlengése miatti korrekciót mindig a leg gondosabban kell meghatározni.

Méréseimben az együttlengést minden állomáson három-három sorozatban határoztam meg, minden sorozat öt egyes meghatározásból állott. A sorozatok közül egy mindig a lengési időmérés előtt észleltetett s egy pedig utána.

A relativ ingaméréseknél kiváló gond fordítandó az időmeghatározásokra, a melyeknek czélja az óra járását levezetni a lengésidőmérés epocháira. Az időmeghatározásokat egy STARKE KAMMERER-től származó universzális műszerrel végeztem (5. ábra). A műszer egy beton alapon elhelyezett földdel kitöltött vasállványon nyugodott egy favázás vászonsátor védelme alatt. A mérés alatt a sátor teljes felső része eltávolítottatott, a mi által elkerültem a szűk réseknél fellépő refrakció káros befolyását. Mérési módszerül a polaris (α Ursae minoris) vertikális



5. ábra.

síkján való átmenetek megfigyelését választottam (DÖLLEN-féle módszer).

Minden egyes időmeghatározásnál váltott távcső-állomásokban legalább 8 időcsillag átmenetét jegyeztem fel, a mi

négy teljes (a műszerhibákra is kiterjedő) időmeghatározásnak felel meg. Rendesen azonban 10—12 időcsillagot észleltem, azaz 5—6 teljes időmeghatározást végeztem. Az átmenetek észlelése egy KNOBLICH-féle félmásodperczes boxchronometer után a szem és fülmetodussal történt; a chronometert aztán egy FUESS-féle chronograf segítségével a mérés tartama alatt legalább háromszor (de rendesen 4—5-ször) összehasonlítottam az ingaórával.

Az órajárás levezetésénél tekintettel voltam az órajárásnak a légnyomás hatása alatt bekövetkező változására. Az időmeghatározások közötti időközökben az átlagos légnyomást az 1908. évi észleléseknél az ingaészlelések adataiból vezettem le, az 1911. és 1913. évi észleléseknél pedig egy barograf adatai szolgáltatták az átlagos légnyomást. Az átlagos légnyomásból mindig kiszámítottam az órajárást 760 mm légnyomásra s aztán ebből vezettem le az ingasorozatokra nézve az ingasorozat átlagos légnyomásának megfelelően a valódi órajárást.

Minden állomáson legalább két időmeghatározást végeztem, egyet az észlelések előtt, a másodikat az észlelése után.

Egy sorozatnak nevezve a négy inga lengési idejének egymásután való meghatározását, minden állomáson legalább két ilyen sorozatot észleltem. A sorozatokat mindig 24 órára szimmetrikusan osztottam el. Két sorozat észlelése esetében a második sorozatot 12 óra múlva, négy sorozatot észlelve a másodikat 6 óra múlva kezdtem el. A szimmetrikus elosztással az órajárásból meg a változó hőmérsékletből származó periodikus hibákat küszöböltük ki.

Az egyes állomásokra nézve a fontosabb adatokat az alábbi táblázatba állítottuk össze:

Folyó- szám	Állomás	Az inga észlelések időtartama napokban	Időmeg- határozások száma	Mért sorozatok száma	Mért ingák száma
1	Pankota	1	2	4	16
2	Világos	1	2	5	20
3	Liváda	3	3	12	48
4	Kuvin	3	4	10	40
5	Temes Hidegkút	2	3	7	28
6	Arad	2	3	5	20
7	Makó	1	2	4	16
8	Szeged	3	2	8	32
9	Baja	1	2	4	16
10	Szabadka	4	2	10	40
11	Gyergyóalfalu	1	2	4	16
12	Szászrégen	2	2	4	16
13	Marosvásárhely	1	2	4	16
14	Marosludas	3	3	3	12
15	Bucsin	2	2	4	16
16	Nagyenyed	2	2	4	16
17	Kecskemét	1	3	2	8
18	Borosjenő	4	2	7	28
19	Borossebes	3	3	5	20
20	Honclő	3	3	5	20
21	Kőrösbánya	2	2	4	16
22	Abrudbánya	3	3	4	16
23	Aranyosbánya	4	2	6	24
24	Nagyszeben	2	2	4	16
25	Vizakna	5	2	7	28
26	Nagyselyk	3	3	5	20
27	Kiskapus	2	2	4	16
28	Dicsőszentmárton	3	3	5	20
29	Nagysármás	3	3	4	16

A mi a lengési idő-mérés pontosságát illeti tudvalevőleg a lengési időben levő hiba állandó, szabályos és szabálytalan részből tevődik össze. Az állandó hiba származik a redukzio-képletben szereplő konstansok hibáiból (különösen a hőmérsékleti és lég-sűrűségi konstanséból), az együttlengés meghatározás-hibájából, az órajárás meghatározás-hibájából és végül az ingahossz állandó természetű megváltozásából. A szabályos hiba főleg a hőmérsékletjárásból (a higanyhőmérő a hőmérsékletváltozásnál nem mutatja az inga valódi hőmérsékletét), továbbá az órajárás periodikus megváltozásból származik. Végül a szabálytalan hiba származik a koincidencia-észlelések, a hőmérő-, a barometerleolvasások, az órajárás-változások, szabálytalan hőmérséklet-változások hibáiból.¹ Méréseimre nézve az alábbi táblázatban állítottam össze azon adatokat, melyek a méréseim pontosságát mutatják.

	1908. évi	1911. évi	1913. évi
	ingaexpeditio		
A redukzio képletben szereplő constansok hibáinak hatása	$\pm 0.3 \times 10^{-7} \text{ sec}$	$\pm 0.3 \times 10^{-7} \text{ sec}$	$\pm 0.3 \times 10^{-7} \text{ sec}$
Az együttlengés meghatározás középhibája	± 0.6	± 0.6	± 0.6
Az órajárás meghatározás középhibája	± 1.3	± 1.1	± 0.7
Az ingahossz állandó megváltozásának középhibája	± 5.3	± 8.3	± 2.7
A szabályos hiba állandó részének középértéke	± 3.7	± 1.7	± 3.3
A közép-szabálytalan hiba	± 4.7	± 4.2	± 3.6

A fent megadott értékek egy ingának egyszeri megfigyeléséből származó lengési időre vonatkoznak. E szerint egy ingának egyszeri megfigyeléséből levezetett lengési időnek közép teljes hibája

¹ Lásd részletesebben »Ingákkal való relativ gravitaciómérések pontossága» OLTAY KÁROLYTÓL. Megjelent a Matematikai és Természettudományi Értesítő XXX. kötetének 5. füzetében, 843. 1. 1912.

az 1908. évi méréseknél $\pm 7.8 \times 10^{-7}$ sec,

az 1911. „ „ $\pm 9.5 \times 10^{-7}$ sec,

az 1913. „ „ $\pm 5.3 \times 10^{-7}$ sec.

Minden állomáson 4 ingát n -szer mértünk s az így levezetett középértéket használtuk fel a számításra. Ezeknek az értékeknek a közép teljes hibái

az 1908. évi méréseknél $\pm 3.6 \times 10^{-7}$ sec,

az 1911. „ „ $\pm 4.5 \times 10^{-7}$ sec,

az 1913. „ „ $\pm 2.3 \times 10^{-7}$ sec.

A gyorsulásdifferenciák középhibái pedig

az 1908. évi mérésnél $\pm 1.6 \times 10^{-5}$ m/sec²,

az 1911. „ „ ± 2.3 ,

az 1913. „ „ ± 1.1 .

A gravitatio-mérések végeredményeit az észlelési hely koordinátáinak feltüntetésével az alábbi táblázat szolgáltatja:

Folyó szám	Á l l o m á s	Az állomás koordinátái			A tenger-szinig terjedő réteg sűrűsége gr. pro cm ³	Mért nehézség-gyorsulás g cm/sec ²
		Földr. szélesség φ	Földr. hosszúság λ keletre Gr.-tól	Magasság Adria felett m		
1	Budapest	47° 28.8'	19° 3.2'	+108	1.9	980.852
2	Pankota	46 21.1	21 42.1	+103	1.9	733
3	Világos	46 16.0	21 36.4	+116	1.9	744
4	Livada	46 14.2	21 37.8	+114	2.0	741
5	Kuvin	46 10.0	21 35.3	+121	2.0	741
6	Temes-Hidegkút	46 4.4	21 34.2	+132	2.0	702
7	Árad	46 10.3	21 19.4	+109	1.9	724
8	Makó	46 13.1	20 28.7	+ 87	1.9	734
9	Szeged	46 15.5	20 8.6	+ 84	1.9	742
10	Baja	46 10.8	18 57.4	+ 94	1.9	734
11	Szabadka	46 6.0	19 39.9	+115	1.9	726
12	Gyergyóalfalu	46 42.1	25 30.7	+754	2.3	602
13	Szászrégen	46 46.7	24 42.4	+388	2.3	686
14	Marosvásárhely	46 32.7	24 34.1	+327	2.3	670
15	Marosludas	46 29.2	24 6.1	+267	2.3	690
16	Bucsin	46 38.6	25 16.7	+1019	2.4	980.544
17	Nagyenyed	46 18.5	23 43.7	+ 256	2.3	655
18	Kecskemét	46 54.9	19 41.3	+ 114	1.9	780
19	Borosjenő	46 25.6	21 50.6	+ 114	2.3	724
20	Borossebes	46 22.4	22 3.2	+ 143	2.3	699

Folyó szám	Állomás	Az állomás koordinátái			A tengerszínig terjedő réteg sűrűsége gr. pro cm ³	Mért nehézséggyorsulás g cm/sec ²
		Földr. szélesség φ	Földr. hosszúság λ keletre Gr.-tól	Magasság Adria felett m		
21	Honcő	46 16·2	22 20·7	+ 184	2·3	680
22	Körösbánya	46 10·6	22 42·8	+ 259	2·4	649
23	Abrudbánya	46 16·4	23 4·5	+ 599	2·4	598
24	Aranyosbánya	46 23·0	23 17·2	+ 481	2·4	635
25	Nagyszeben	45 47·9	24 9·6	+ 424	2·2	606
26	Vizakna	45 52·9	24 3·6	+ 397	2·2	609
27	Nagyselyk	46 1·7	24 9·6	+ 331	2·3	631
28	Kiskapus	46 7·0	24 15·6	+ 294	2·3	641
29	Dicsőszentmárton	46 19·9	24 17·4	+ 287	2·3	657
30	Nagysármás	46 45·1	24 10·3	+ 337	2·3	695

A nehézséggyorsulás értékek az ú. n. potsdami rendszerben értendők, a melyre nézve kiinduló érték a potsdami abszolút meghatározás eredménye. Ez a kiinduló érték

$$g = 981 \cdot 274 \text{ cm/sec}^2$$

mely vonatkozik a $\begin{cases} \varphi = 52^\circ 22 \cdot 9' \\ \lambda = 13^\circ 4 \cdot 1' \text{ kel. GREENWICH-től} \\ m = 86 \cdot 5 \text{ m adatokkal definiált helyre.} \end{cases}$

A következő táblázatban a tengerszínre redukált eredmények vannak feltüntetve. A redukciók közül Δg_1 a magasság miatt szükséges redukcio

$$\Delta g_1 = + 2g \frac{M}{R},$$

a hol M az állomás tengerszínfeletti magassága, R a gömbnek tekintett föld sugara (6370×10^3 m).

Δg_2 a tengerszín és az állomás közötti tömeg attrakciója, melyet a BOUGUER-féle képletből számítottam:

$$\Delta g_2 = - \frac{3}{4} \frac{S}{s} \Delta g_1$$

a hol S az átlagos földsűrűség ($5 \cdot 6$ pro cm³), s pedig a tengerszín és az észlelő állomás közötti tömeg átlagos sűrűsége.

Folyószám	Á l l o m á s	Reductió a tenger- szinre		Nehézség gyorsulás a tengerszinen		Teoretikus nehézség gyorsulás a tenger- szinen γ_0	$g_0 - \gamma_0$	$g'_0 - \gamma_0$
		Δg_1	Δg_2	$g_0 = g + \Delta g_1$	$g'_0 = g + \Delta g_1 + \Delta g_2$			
				cm/sec ²	cm/sec ²	cm/sec ²		
1	Budapest	+ 0·033	— 0·008	980·885	980·877	980·841	+ 0·041	+ 0·036
2	Pankota	+ 0·032	— 0·008	765	757	739	+ 0·026	+ 0·018
3	Világos	+ 0·036	— 0·009	780	771	731	+ 0·049	+ 0·040
4	Liváda	+ 0·035	— 0·009	776	768	728	+ 0·048	+ 0·040
5	Kúvin	+ 0·037	— 0·010	778	768	721	+ 0·057	+ 0·047
6	Temes-Hidegkút	+ 0·041	— 0·011	743	732	713	+ 0·030	+ 0·019
7	Arad	+ 0·034	— 0·009	758	749	721	+ 0·037	+ 0·028
8	Makó	+ 0·027	— 0·007	761	754	726	+ 0·035	+ 0·028
9	Szeged	+ 0·026	— 0·007	768	761	730	+ 0·038	+ 0·031
10	Baja	+ 0·029	— 0·007	763	756	722	+ 0·041	+ 0·034
11	Szabadka	+ 0·036	— 0·009	762	753	715	+ 0·047	+ 0·038
12	Gyergyó-Alfalu	+ 0·233	— 0·072	835	763	770	+ 0·065	— 0·007
13	Szászrégen	+ 0·120	— 0·037	806	769	777	+ 0·029	— 0·008
14	Marosvásárhely	+ 0·101	— 0·031	771	740	756	+ 0·015	— 0·016
15	Marosludas	+ 0·082	— 0·025	772	747	751	+ 0·021	— 0·004
16	Bucsin	+ 0·314	— 0·100	858	758	765	+ 0·093	— 0·007
17	Nagyenyed	+ 0·079	— 0·024	734	710	735	— 0·001	— 0·025
18	Kecskemét	+ 0·035	— 0·009	815	806	789	+ 0·026	+ 0·017
19	Borosjenő	+ 0·035	— 0·011	759	748	745	+ 0·014	+ 0·003
20	Borossebes	+ 0·044	— 0·014	743	729	741	+ 0·002	— 0·012
21	Honcótó	+ 0·057	— 0·018	737	719	731	+ 0·006	— 0·012
22	Kőrösbánya	+ 0·080	— 0·026	729	703	722	+ 0·007	— 0·019
23	Abrudbánya	+ 0·185	— 0·060	783	723	731	+ 0·052	— 0·008
24	Aranyosbánya	+ 0·148	— 0·048	783	735	742	+ 0·041	— 0·007
25	Nagyszeben	+ 0·131	— 0·039	737	698	688	+ 0·049	+ 0·010
26	Vizakna	+ 0·122	— 0·036	731	695	695	+ 0·036	0·000
27	Nagyselyk	+ 0·102	— 0·031	733	702	709	+ 0·024	— 0·007
28	Kiskapus	+ 0·091	— 0·028	732	704	716	+ 0·016	— 0·012
29	Dicsőszentmárton	+ 0·089	— 0·027	746	719	737	+ 0·009	— 0·018
30	Nagysármás	+ 0·104	— 0·031	799	768	775	+ 0·024	— 0·007

A nehézségi gyorsulásnak a tengerszinen levő teoretikus értékeit a HELMERT-féle 1901-es képlettel számítottam:¹

$$\gamma_0 = 978.030 (1 + 0.005302 \sin^2 \varphi - 0.000007 \sin^2 2\varphi)$$

a hol φ az észlelési hely földrajzi szélessége.

Az utolsó rovat a redukált *tényleges* nehézséggyorsulás eltéréseit mutatja a *teoretikus* nehézséggyorsulástól, ezek azon értékek, a melyekből az izosztatikus kompenzációra következtetni lehet. Feltűnő, hogy míg a Nagy Magyar Alföld állomásain a *tényleges* g értékek mind nagyobbak a teoreticus, illetve normális g értéknél ($g'_0 - \gamma_0 > 0$), addig a Mezőség állomásain, a görgényi havasok állomásán (Bucsin) és a gyergyói fensík állomásán (Gyergyóalfalu), mind kisebbek ($g'_0 - \gamma_0 < 0$). Egyelőre nem megyek bele ezen érdekes különbségek vizsgálatába, mert még nem áll elegendő anyag rendelkezésre, hogy ezekből következtetéseket vonhassunk az izosztatikus kompenzációra.

Érdekes lesz megemlékezni azokról az állomásokról, a hol a Katonai Földrajzi Intézet is mért nehézséggyorsulást.² Ilyen állomás Budapesten kívül három van: Kecskemét, Marosvásárhely és Marosludas. Budapestre vonatkozólag már publikáltam a mérések összehasonlítását, úgy hogy most csak az utóbbi három állomásra terjeszkedem ki.

A Katonai Földrajzi Intézet a három állomásra a következő értékeket kapta:

Állomás	φ Földrajzi szélesség	λ Földrajzi hosszúság Ferrótól	Tengerszín feletti magasság	Mért nehézség gyorsulás
Kecskemét	46° 54.5'	37° 21.4'	120 m	cm/sec ² 980.801
Marosvásárhely	46° 32.0'	42° 13.0'	310	688
Marosludas	46 28.1	41° 46.0'	281	731

¹ R. HELMERT: Der normale Theil der Schwerkraft im Meeresniveau, Sitzungsbericht des Kön. Preuss. Akademie der Wissenschaften, Jahrgang 1901. pag. 336.

² Lásd «Mittheilungen des k. u. k. Militärgeographischen Institutes» Band. IV, V, VI, VII, XII, XIII, XIV, XVII, XXI.

Ezek az értékek az úgynevezett bécsi rendszerre vonatkoznak, tudniillik az OPPOLZER-féle bécsi abszolút meghatározásra, mely szerint

$$g = 980.866 \text{ cm/sec}^2$$

a $\varphi = 48^\circ 13' 57''$ és $m = 236.0 \text{ m}$ helyen (Universitäts Sternwarte).

Ezeket a potsdami rendszereire átszámítandó, belőlük

$$0.016 \text{ cm/sec}^2$$

levonandó.

A potsdami rendszerben az adatok a következők:

Á l l o m á s	Mért nehézségi gyorsulás	Redukció a tenger- szinre		Teoretikus nehézség gyorsulás	$g'_0 - \gamma_0$
		Δg_1	Δg_2		
Kecskemét.....	cm/sec ² 980.785	+ 0.037	— 0.009	cm/sec ² 980.789	+ 0.024
Marosvásárhely	672	+ 0.096	— 0.029	755	— 0.016
Marosludas	715	+ 0.087	— 0.027	749	+ 0.026

Méréseimmel az utolsó rovatba írt értékek hasonlíthatók össze. A mint látható, a marosvásárhelyi érték egyezik, nagyobb az eltérés a kecskeméti értéknél (-0.007 cm/sec^2), a mi azonban még tűrhető, tekintve a Katonai Földrajzi Intézet egyszerűbb instrumentális felszerelését, a marosludasi érték azonban már olyan nagy eltérést mutat (-0.030 cm/sec^2), a mely arra vall, hogy a marosludasi meghatározás teljesen rossz. Magyarázatul szolgál erre az a körülmény, hogy a Katonai Földrajzi Intézetnek egyes ingái egyáltalán nem tettek eleget az invariabilitás feltételének s a marosludasi észlelés is ilyen ingával történt.

Oltay Károly.

PHYSIKAI SZEMLE.

A kombinációs hangokról.

Ha két hang egyidőben szól, alkalmas megfigyelési körülmények közt e primér hangokat kísérő kombinációs hangok egész sorát hallhatjuk; p -vel és q -val jelölve a primér hangok rezgésszámát a megfigyelhető kombinációs hangok rezgésszámai:

$$p - q, p + q, 2p - q, 2q - p, 3p - 2q, 3q - 2p$$

lesznek. R. KÖNIG szerint a kombinációs hangokat a primér hangok közt létesülő gyorsütemű hanglűktetéseknek kellene tekintenünk. Ez egyszerű magyarázattal szemben többféle nehézség merült fel s ezek elkerülésére HELMHOLTZ a kombinációs hangoknak lényegesen más elméletét adta.

HELMHOLTZ elmélete azon a feltevésen alapszik, hogy a hangrezgéseknek a fül labirintusáig való közvetítésében résztvevő rugalmas rendszerek közt olyan is van, melynél a kérdéses rezgési amplitúdók nem tekinthetők kicsinyeknek és ezek mellett az illető rugalmas rendszernél már nincsen érvényben a rugalmas erők és a deformációkomponensek közti lineáris összefüggés. Egy ilyen rendszer p és q frekvenciájú egyidőben ható periodikus erők hatása alatt

$$p, q, p - q, p + q, 2p - q, 2q - p$$

stb. frekvenciájú harmonikus mozgásokból összetett rezgést végez. Ezek a primér és kombinációs hangoknak megfelelő mozgási komponensek a labirintus folyadékaival közlődnék és így természetesen a primér hangok mellett a kombinációs hangok említett sorozata is kisebb-nagyobb mértékben hallható lesz. Hogy a hangrezgések tovaközlődésében résztvevő rugalmas rendszerek közül melyiknek köszönhetők a kombinációs hangok, azt biztossággal nem lehet megállapítani. HELMHOLTZ a kombinációs hangok keletkezésének legvalószínűbb helyét a dobhártyát és a vele összefüggő hallócsontokat tartotta. Sok esetben, mint azt látni fog-

juk, a kombinációs hangok már a fülön kívül keletkeznek és alkalmas, hallószervünkötől független módszerekkel is kimutathatók.

A Hook-féle (lineáris) erőtvénytől eltérő módon viselkedő rugalmas rendszerek matematikai tárgyalásánál HELMHOLTZ csak arra az esetre szorítkozott, midőn egy anyagi pontot $f = n_0^2 x + \delta x^2$ alakú rugalmas erő tart $x = 0$ -nál levő egyensúlyi helyzetében s a pontra azonkívül p és q frekvenciájú periodikus erők hatnak. A megfelelő mozgásegyenlet:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + n_0^2 x + \delta x^2 = a \cos pt + b \cos qt \quad (1)$$

megoldása tényleg a primér és kombinációs hangoknak megfelelő harmonikus tagokat tartalmazza. CL. SCHAEFER megmutatta,¹ hogy abban az általánosabb esetben is, ha az anyagi pont mozgása a:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + n_0^2 x \pm \delta_{\alpha\beta} \frac{d^\alpha x}{dt^\alpha} \frac{d^\beta x}{dt^\beta} = a \cos pt + b \cos qt \quad (2)$$

α, β (tetszőleges pozitív egész számok.)

differentiálegyenlet szerint történik, a rezgési komponensek ugyanezen sorozata lép fel. CL. SCHAEFER és E. JURETZKA² aztán hasonló irányú vizsgálatnak vetették alá a húrok és hárták rezgésegyenleteit és megállapították, hogy $\alpha = \beta = 1$ esetnek megfelelően, tehát egy négyzetes csillapodási tag bevezetésével a húrok és membránok rezgése is a primér hangokon kívül az előzőekben már többször felsorolt kombinációs hangokat tartalmazza. Megállapították azonkívül, hogy különböző α, β értékek mellett az egyes kombinációs hangok intenzitása más módon függ a primér hangok magasságától. Megfelelő kísérleti anyag alapján tehát ki lehetne választani az α és β értékeknek megfelelő egyenletek közül azt, a mely leghívebben adja vissza a kombinációs hangok jelzett intenzitás elosztását. Az eddigi kísérletekből biztossággal csak annyit lehetett megállapítani, hogy a kombinációs hangok a primér hangok magasodásával erősödnek. A kombinációs hangok ilyértelmű erősödése kiadódik a (2) egyenlettől $\alpha = \beta = 1$ helyettesítés mellett, míg (1) szerint a kombinációs hangok intenzitása a primér hangok magasságától nem függ. Így a kombinációs hangok keletkezésének ma-

¹ Ann. d. Phys. (4.) 33. 1216. I. (1910).

² Ann d. Phys. (4.) 44. 581. I. (1913).

gyarazásánál a deformációkomponensekkel arányos rugalmas erő és egy négyzetes csillapodási tag bevezetése látszik a legelőnyösebbnek.

A kísérleti vizsgálatok, a hallható kombinációs hangok magasságának és erősségének megállapításán kívül, leginkább objektív kombinációs hangok előállítására irányultak. Objektívnek szokás egy kombinációs hangot nevezni, ha a fülön kívül levő, hangrezgéseket közvetítő rendszerben keletkezett. Szubjektív kombinációs hangok azok, a melyek a fülön kívül ki nem mutathatók s a megfigyelő jelenlétükről csak hallása útján győződhetik meg. Objektív kombinációs hangok keltesére legalkalmasabb egy mikrofon-telefonkör. A mikrofon lemezére esnek a primér hangok s a megfelelő rezgések közlődnek a telefonnal. A telefon hangját rezonátorokkal analizálva CL. SCHAEFER¹ megállapította, hogy kombinációs hangokat tartalmaz. E. WAETZMANN és G. MÜCKE² a telefonmembrán rezgéseit fotografikusan regisztrálták s a fotogrammok kimérésével kombinációs hangok jelenlétét biztosan megállapították; a $p - q$ rezgésszámú különbségi hang jelentkezett legfeltűnőbben, intenzitása a primér hangokét több esetben jelentékenyen felülmúlta. Az objektív kombinációs hangok kimutatása után a kombinációs hangok HELMHOLTZ által leírt keletkezési módjának lehetőségét kísérletileg is bebizonyítottanak lehetett tekinteni. Némileg gyengítették e kísérletek bizonyító erejét E. WAETZMANN³ legújabb vizsgálatai, melyekben kimutatta, hogy a telefon-mikrofonkörben a kombinációs hangok keletkezése elsősorban a mikrofon elektromos ellenállása változásának módjára vezethető vissza, a kombinációs hangok dobhártyán és hallócsontokon való keletkezésénél pedig minden valószínűség szerint csak mechanikai folyamatok szerepelnek. Mégis a telefon-mikrofonkörben fellépő és a szubjektív kombinációs hangok közti messzeterjedő analógia a mellett szól, hogy a két jelenség kapcsolata nem látszólagos; biztossággal a kérdést csak további, a kombinációs hangok más esetekben való keletkezési módjára irányuló vizsgálatok fogják eldönthetni.

Bartoniék Emil.

¹ Ann. d. Phys. (4.) 17. 572. l. (1905).

² Verhandlungen d. Deutsch. Phys. Ges. 15. 59. l. (1913).

³ Ann. d. Phys. (4.) 42. 729. l. (1913).

C. Benedicks: A Planck-féle energiaceloszlási törvény levezetése agglomerációs hipotézissel; egyszerű összefüggés a keménység és a rezgésszám között. (Ann. d. Physik. 42, 133 l., 1913.)

A szerző néhány példát említ fel, melyek valószínűvé teszik, hogy a szilárd testek, elsősorban a fémek, nem tekinthetők egy atomúaknak, hanem a hőmérséklet változásával az atomok többé-kevésbé egymáshoz kapcsolódhatnak. Ezen összekapcsolódást, mely a szilárd test belső potenciális energiájának változásával együtt jár, a szerző agglomeráció-nak nevezi és felhasználja arra, hogy az egyatomú szilárd testek energiatartalmának (hőtartalom) függését a hőmérséklettől és a kérdéses test specifikus sajátosságaitól előállítsa.

Ismeretes, hogy elég magas hőfokon az egyatomú szilárd testek energiatartalmát a RAYLEIGH-féle törvény (melynek egyenes következménye a DULONG és PETIT-féle törvény) fejezi ki:

$$W = 3RT,$$

hol R a gázállandó, T pedig az abszolút hőmérséklet. EINSTEIN elméleti és NERNST kísérleti vizsgálatai nyomán azonban sokkal jobbnak bizonyult az energiacuantum hipotézisén felépített PLANCK-féle képlet

$$W = 3R \frac{\beta \nu}{e^{\frac{\beta \nu}{T}} - 1},$$

hol R és β univerzális állandók, ν pedig a kérdéses test úgynevezett termikus önrezgése. (Lásd F. A. LINDEMANN Physikalische Zeitschrift, 11, 609 l., 1910.) Az agglomeráció feltételezésével a RAYLEIGH-féle energiatartalom értékéhez még hozzájárul az agglomeráció potenciális energiája $f(T)$. Az egész hőtartalom a szerző szerint

$$W = 3RT - W_0 + f(T) \quad (1)$$

hol W_0 egy ismeretlen természetű állandó. Az összes hőenergia ilyenformán két lényeges részből tevődik össze: egy termikus kinetikus és egy agglomerációs potenciális részből. Az $f(T)$ függvényt most úgy kell megválasztani, hogy az (1) alatti energia a PLANCKÉVAL azonos legyen, a mi a szerzőnek két közelítő eljárással sikerül is. Mindebből látható, hogy a PLANCK-féle energiacelosztási törvény a quantumhipotézis feltételezése nélkül is levezethető.

A képleteknél talán kissé jobban megvilágítják a fizikai viszonyokat a következő megjegyzések.

A $W = 3RT$ RAYLEIGH-féle törvény tulajdonképpen az egyenletes energiaeloszlás törvényét fejezi ki, mely szerint minden atom minden egyes szabadsági foka ugyanannyi energiát kap. A kísérletek ezt megcáfolták, mire PLANCK föltette, hogy az energia szétoztásánál a nagyobb rezgésszámú energiák nagyobb energiadagokat kapnak. E föltevés folyománya a kísérletekkel jól egyező PLANCK-féle képlet, melyben W gyorsabban fogy T -vel, mint a RAYLEIGH-féleben. Ámde ez a gyorsabb fogyás elérhető BENEDICKS szerint az által is, hogy feltesszük, miszerint a hőmérséklet csökkenésével a szabadsági fokok száma — az agglomeráció folytán — kisebbedik, de azért minden szabadsági fok ugyanannyi energiát kap.

Az agglomerációs hipotézisből a következő érdekes következtetések vonhatók:

1. Közfelfekvő gondolat, hogy az agglomeráció előrehaladtával a test kohéziója (vagy keménysége) is megnövekszik. Plauzibilisnek látszik a szerző előtt, hogy az agglomerációs energiára nézve jellemző W_0 állandó négyzete a keménységgel egyenesen, az atomsúlylyal pedig fordítva arányos. Ezen alapon kitűnik, hogy W_0 a test termikus önrezgésével arányos mennyiség (lásd fentebb). Ha a keménységet ismerjük, ez az önrezgés kiszámítható. A szerző az összes egyatomú testekre kiszámítja ezen önrezgés értékét RYDBERG és RICHARD keménységi képleteinek segítségével s a már kipróbált LINDEMANN-féle (lásd fentebb az idézetet) képlettel jó megegyezést talál.

2. Figyelemreméltó, hogy $f(T)$ alakja formára nézve megegyezik a LANGEVIN-féle formulával, mely egy paramágneses gáz permeabilitásának a hőfoktól való függését fejezi ki. Az atomokat rendező agglomeratív erő megfelel LANGEVIN-nél a mágneses térerősségnek, mely a mágneses atomokat irányítja, míg a rendeződés ellen mindkettőnél a hőmozgás működik.

Tomits Iván.

PHYSIKALISCHES LABORATORIUM.

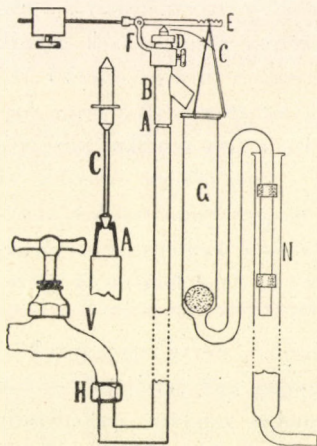
**A vízvezetéki nyomást csökkentő és állandó nyomás-
magasságot biztosító készülék.**

Ilyenmő szerkezetre többek közt a BECKMANN-féle forrpont-emelkedési készüléknél van szükségünk, mert a közönséges vízcsapokat a vezetékben uralkodó tetemes nyomás miatt nehéz kellően szabályozni és a csap véletlen megnyitása a forraló készüléket is kockáztathatja.

A mellékelt ábrában olyan szerkezet van előtűntetve, mely H holländerrel közvetlenül a V vízvezetéki csapra van erősítve. A felfelé emelkedő cső felső végére A csonka kúp van készítve, melyre B cső illik. Az A csonka kúp felső része fedve van és beléje 4 mm átmérőjű kerek lyuk van fúrva. Az utóbbiba illik a C rudascskán lévő csonka kúp, mely képes a nyílást teljesen elzárni. A biztos zárás végett C vezetékben jár, mely azáltal keletkezik, hogy B csőre kellően átlukasztott D fedő van téve. A víz a sárgarezet, melyből a szerkezet készült, idővel megtámadja, de ilyenkor a zárást könnyen

biztosíthatjuk azáltal, hogy C -t leszorítás közben forgatjuk és ily módon a kúpot a nyílásba beköszöröljük.

G -rudacskát a víznyomás ellenére állandóan lefelé kell szorítani; erre szolgál E emelő, mely az F karon lévő tengely körül foroghat. Az emelő jobboldali végén függ G üvegcső, melyben lazán járó parafagömb fekszik. Az utóbbi célja csak az, hogy a B cső lehajló ágából lefolyó víz ne sodorjon magával légbuborékokat, melyek G cső U alakú részében a folyadékoszlop folytonosságát megszakíthatnák.



G csőnek lefelé irányuló ága szabadon jár N csőben, melyben a víz-magasságot állandóan akarjuk tartani. Ennek alsó része van összekötve egy vagy több vízszintes csővel, melyekből a víz kellő számú csapokon át jut az egyes BECKMANN-féle készülékekhez.

E emelő másik végén S súly ide-oda tolható, hogy a vízzel telt G -nek túlsúlyát a szükséghez képest ellensúlyozhassuk.

Megindításkor N nivóső alsó részét zárva tartjuk és a vízcsapot megnyitjuk, miáltal G részben megtelik vízzel, anélkül, hogy N -be is jutna. Hogy az utóbbi bekövetkezzék, felemeljük E emelőnek G -vel megterhelt oldalát, minek következtében G megtelik és a víz a kanyar csövön át lefolyik N csőbe is. Mikor a levegő G csőnek szűkebb részéből teljesen ki van űzve, és a víz felszíne N -csőben G középtájáig ér, a szerkezetet magára hagyhatjuk és a vízfogyasztást N ből megindíthatjuk.

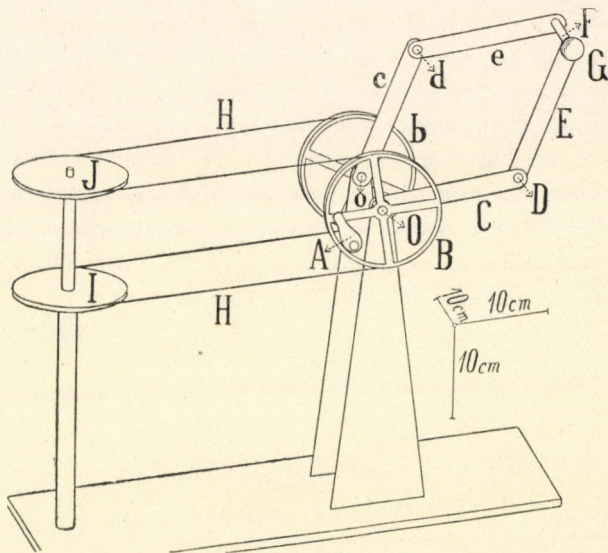
Megjegyzendő azonban, hogy erősebb vízvezetéki nyomásnál a víz nagy erővel áramlik B cső fedőjére és belőle ki is szóródik. Ennek elkerülése végett B csőben olyan diafragma van alkalmazva, melyen C kúpja éppen csakhogy keresztül fér és fölötte C rúdon kevésbé nagyobb tárcsa van megerősítve, melyeken a vízszög megtörik. Hogy a víznek elegendő útja maradjon, C rúdnak a kúp-feletti része kellően meg van vékonyítva. Ily viszonyok közt a víz csendeseu folyik ki B -nek oldalcsőéből, a közvetlenül alatta lévő G csőbe.

Schuller Alajos.

ELŐADÁSI KISÉRLETEK.

Készülék két körmozgás egyenes eredőjének bemutatására.

A mellékelt vázlatos rajzon (6. ábra) O és o két forgási tengelyt jelent, melyek egymásnak meghosszabbításába esnek. A forgást A forgattyúval hozzuk létre, mely közvetlenül B csigát és C kart mozgatja, I és J



6. ábra.

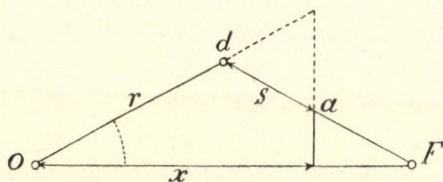
csigák közvetítésével pedig b csigát és c kart hozza ellenkező forgásba. D és d tengelyek, melyek körül E és e karok foroghatnak, eszerint körpályákon, még pedig ellenkező értelemben kerülik meg az $O—o$ tengelyt. E és e karok ismét F közös tengely körül foroghatnak, melynek külső végére G fémből készült vájt tükör van erősítve, hogy kellő megvilágításnál a mozgását távolról is jól lehessen látni.

Hajtsuk a forgattyút az ábrázolt helyzetből kiindulva az óramutató

járásával megegyező irányban, még pedig úgy, hogy másodpercenként hozzávetőleg háromszor lehetőleg egyenletesen járjon körül, akkor addig míg B és b csigák átmérője egyenlő, F tengely pontjai egyenesben mozognak, a két ellenkező körmozgás tehát egyenes eredőt ad. A négy kar, egyenes vonalnak képzelve, képviseli az összetevőkből alkotott egyenközényt, melynek F -ben lévő pontja mutatja a pillanatnyi helyzetet, OF távolság tehát a kitérés nagyságát jelenti. Az eredő egyenes mozgás irányát azáltal változtathatjuk meg, hogy I és J csigákat megfogva, elforgatjuk B és b karokat, mialatt a szál a csigákon csúszik.

Viszont az egyenes ide-oda mozgást a készülékkel felbonthatjuk két ellenkező körmozgásra, ha F tengelyt kellő egyenes vezetésben elég gyorsan és szakadatlanul előre és hátra tologatjuk.

Az utóbbi jelenség párhuzamba hozható a lineárpolarizált fény azon felbontásával, melyet a kvarczba az optikai tengely irányában vagy a



7. ábra.

czukoroldatba lépve szenved, míg az előbbi az említett anyagokból kilépő fénynek felel meg, a mikor a találkozó czirkulár rezgések egyenlőssé tevődnek össze.

Készülékünkkel utánózhatsz a rezgési iránynak (a polárosság síkjának) azon elfordulását is, melyet az említett anyagok belsejében vagy mágneses térben szenved. E végből B vagy b csigák egyikére vastag czérna vagy pamutszálat hajtunk fel, miáltal az átmérő kissé növekszik. A készüléket forgatva azt tapasztaljuk, hogy az eredő rezgés iránya fokozatosan megváltozik és hogy az elfordulás az ellenkező irányban történik, ha a készüléket visszafelé forgatjuk.

Hogy az analógia a szóban forgó optikai tüneménnyel szembeszökőbb legyen, a kísérletet a következő sorrendben végezhetjük. Először az önmagával párhuzamosan megmaradó egyenes eredőt mutatjuk be, azután a czérnaszálat a hajtó szál alá hagyjuk futni, az egyik végét odatartva és a készüléket addig forgatjuk tovább, míg az irányváltozás elég feltűnő nem lett. Ekkor a czérnaszálat eltávolítva ismét állandóan

egyirányú rezgés kapunk. Az egész folyamat megfelel annak, mikor a fény meghatározott vastagságú kvarcztétegen áthaladva, rezgési irányát bizonyos szöggel megváltoztatta.

Jegyezzük meg végül, hogy akkor, a mikor B és b csigák átmérője egyenlő, E és e egyenes vonalaknak képzelt karok minden pontja ellipszisben mozog. Ugyanis legyenek o , d , F az előbbi tengelyek metszéspontjai a rajzlap síkjával (7. ábra) és a pont távolsága d -től s (esetleg $d-F$ vonal meghosszabbításában) akkor

$$x = (r + s) \cos \varphi$$

$$y = (r - s) \sin \varphi$$

$$\text{miből következik: } \frac{x^2}{(r+s)^2} + \frac{y^2}{(r-s)^2} = 1$$

Ha most F pontot oF irányban mozgatjuk, az egyenlet alakja mindig ugyanaz marad, a -pont pályája tehát ellipszis, $(r + s)$ és $(r - s)$ főtengelyekkel. Legyen $r + s = a$ és $r - s = \beta$ akkor $2r = a + \beta$, $2s = a - \beta$ tehát r és s kellő megválasztásával minden adott tengelyű ellipszist előállíthatunk.

Rendes működéshez szükséges, hogy a karok a tengelyek körül könnyen foroghassanak és lassúbb forgatással is czélt érünk, ha E és e karok visszafelé annyira meg vannak hosszabbítva, hogy súlypontjuk D ill. d tengelybe esnek, a mikor szabad végük szintén egyenesben mozog.

Schuller Alajos.

A Stévert-féle lejtő némi kiegészítéséről.

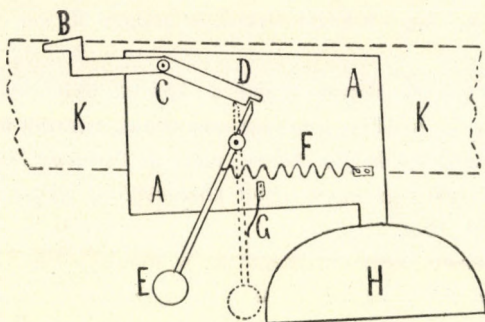
A szóban forgó lejtőnél a gördülő korong és az óramű elektromos kapcsolat folytán egyszerre indul meg, a törés helyére érkező korong azután megakasztja az egyik mutatót, mely a gyorsuló mozgás tartamát mutatja és végül a mozgást megszüntető ütközőnél megállítja az egész óraművet, úgy hogy a két mutató közötti időkülönbség az egyenletes mozgás tartamának felel meg. A kiegészítés czélja közbeeső időket is jelezni, hogy már egyetlen kísérlethől is lehessen a mozgások lefolyására következtetni. Ezt azáltal érem el, hogy a korong alkalmas helyeken csengőket szólaltat meg, természetesen a nélkül, hogy a gördülés észrevehetően meglassíttatnék.

Az egyik ilyen csengőszerkezet a mellékelt ábrán van vázolva.

$A-A$ fémlapra $B-D$ emelő van szerelve, mely C tengely körül könnyen foroghat és úgy van kiegyensúlyozva, hogy magától is visszaesik az ábrázolt helyzetbe. D -nél hozzá támaszkodik E kalapács meg-

hosszabbítása, melyet F rúgó hűz H csengő felé és G ütköző akadályoz meg abban, hogy vele maradandóan érintkezzék.

Az egészet alkalmas szorítókkal úgy erősítjük a lejtőt alkotó egyik KK vasléczhez hogy a B fölött lévő ferde él részben a lejtő síkja fölé érjen és így a gördülő test kissé leszorítsa, kikeresve az a helyet, a hol a csengő a kellő pillanatban megszólal. Ha pl. a lejtős részen az út hossza 40 cm és a korong 20 másodperc alatt teszi meg, a csengő-szerkezetet oda teszük, a hol a tizedik másodperc végét jelzi, amikor az út 10 cm tartozik lenni. Ha továbbá a közel vízszintes részen az út hossza szintén 40 cm, a csengőt ennek közepére téve, a 25-ik másod-



8. ábra.

percet jelzi, míg a mozgás haladó része, mely itt egyedül képezi a megfigyelés tárgyát, a 30-adik másodpercczel fejeződik be. Ezen adatok a következő eredményekhez vezetnek:

A mozgás neve	Út = S cm	Idő = T sec
változó	10	10
"	40	20
egyenletes	20	5
"	40	10

Ezen adatokból csak az első 10 mp. alatt elért sebességre vonatkozó hiányzanak, melyek külön kísérletet igényelnek. E végből az indító szerkezetet 10 cm útra állítjuk be, a mikor az első mutató 10 mp-nél áll meg, a második csengő 20-at jelez és a korong 30 másodperczkor ér a korláthoz.

A mozgás neve	Út = S cm	Idő = T sec
változó	10	10
egyenletes	20	10
"	40	20

A két kísérlet adatai tökéletesen jellemzik az egyenletesen gyorsuló mozgást, minek részletezése e helyen felesleges lenne. Ellenőrzésül az előre kiszámított gyorsulással célszerű még egy harmadik kísérletet bemutatni, melynél az út hossza a lejtős részen 22·5 cm, az idő ugyanott 15 mp., míg a közel vízszintes részen 30 cm útnak 10 mp. felel meg.

Pontos eredmények elérése végett a következőkre kell ügyelnünk. A hol a korong egyhelyben többször megfordul, barázda képződik, mely különösen a kiindulási helyen káros, mert az indulást lassítja, sőt meg is gátolhatja. Ilyenkor az egész lejtőt köszörűkövel leköszörüljük, míg a mélyedés el nem tűnt.

A például felvett lassú mozgásnál az is fontos, hogy a mozgás az alsó részen egyenletes legyen, tehát nem vízszintesen, hanem kissé lejtősen állítjuk be. Evégből a korongot igen lassan, tehát kis magasságból gördítjük le és a hajlason addig igazítunk, míg az egyenletességet el nem érjük.

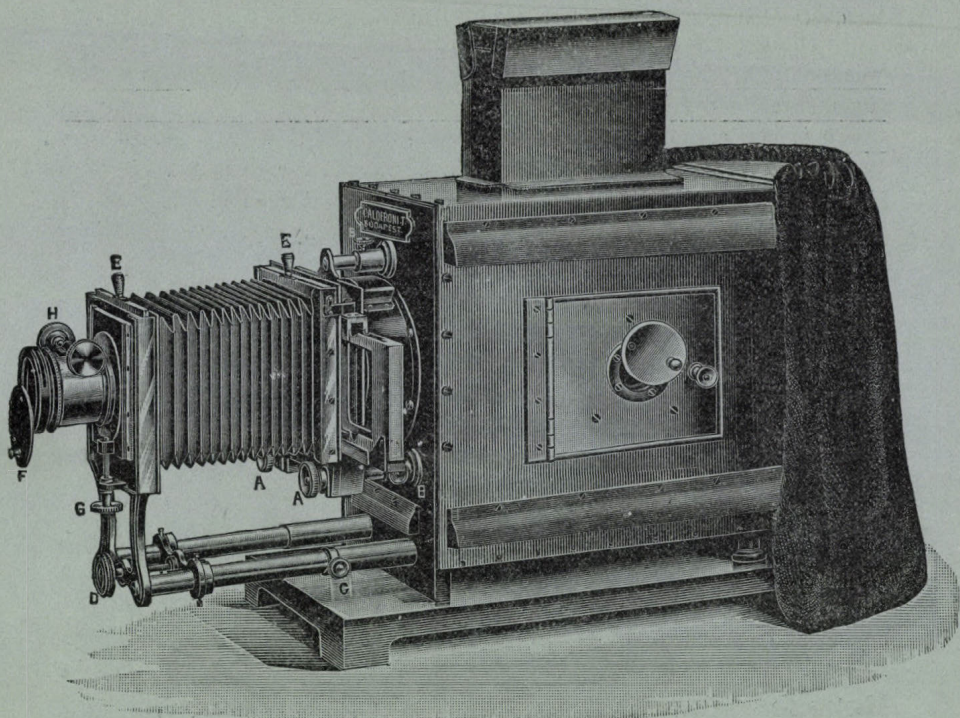
Végül az eredmény még az óra kezelésétől is függ. Rúgóval hajtott közönséges óránál a lengési idő függ a rúgó feszültségétől; ha tehát egyenletes járást akarunk biztosítani, a rúgót egyenlő feszültségnél kell tartani. Elérhetjük ezt, ha a rúgót nem feszítjük meg nagyon és munkaközben időközönként az órakulcsesal utána megyünk, mely célból a kulcsra és a rúgó dobjára feltűnő jelt készítünk és ezeket mindig egymás közelében tartjuk.

Schuller Alajos.

Calderoni mű- és tanszervállalat r.-t.

Budapest, IV., Váci-utca 50.

Ajánlja saját szerkesztésü szabadalmazott vetítőkészülékeit.



Vetítőkészülék «Calderoni I»

Ezen készülék lámpa-szekrénye legjobb minőségű aczélemezekből van készítve, eternit-béléssel és kitűnő szellőztető szerkezettel van ellátva, 120 mm. átm. kettős megvilágítólencsével (Kondensor), hajtócsavarral ellátott objektív-foglaltattal, egy ebbe illő kitűnő vetítési objektívvel, a finom beállítás részére szolgáló mikrometer-csavarral és tolószerkezettel ellátott kettős kép-váltó kerettel van felszerelve. A kondensor-lencsék a lámpatartó szekrényen kívül vannak elhelyezve és a lencsék közt felmelegedő levegő a kondensortartó cső felső részén levő és egy kis fedővel borított nyíláson át távozik. A kondensor mögött egy kali-üvegből készített védőlemez van elhelyezve. — A készülék, mely egy áttört vastalapzatra van felszerelve, teljesen fémből van készítve. — A bronzból készített objektívet tartó előrész egy mikrometer-csavar segítségével magasabbra és mélyebbre állítható. Az oldalajtóval és bársonyból készült fényelzáró-függönyvel ellátott készülék ára fenti felszereléssel *lámpa nélkül*

K 260.—

Vetítőkészülék «Calderoni I. H.»

Ezen készülék, mely ugyanolyan szerkezetű mint a túloldali, egy általunk szerkesztett hűtővel van még ellátva, mely a megvilágító lencsék közé van igtatva. — Ezen felszerelés vetítőkészülékünket a legtökéletesebb illyenmű készülékké avatja. Ára *lámpa nélkül* K 350.—

A vetítőkészülékeinkhez felszerelt hajtócsavarral ellátott objektív foglalatba tetszés szerinti 6 különféle gyújtávolságu vetítési objectivet lehet elhelyezni, melynek gyújtávolsága 150, 200, 250, 310, 355, 405, mm. — Minden készülékhez a fentjelzett árban csak egy darab ilyen vetítési objektív tartozik. — Minden további objektív ára darabonként K 24.—

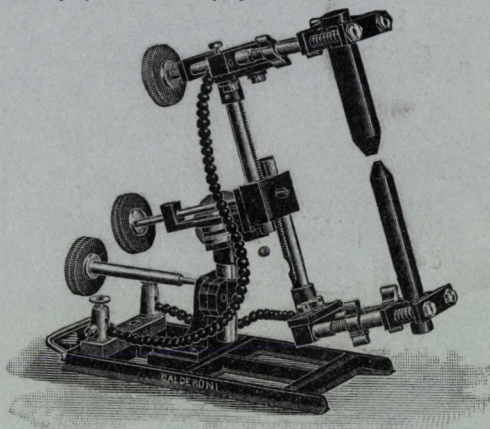
Vetítőkészülékeink a merőleges és vízszintes síkban végbemenő vetítésre, valamint mikroszkopikus vetítésre is, úgy szintén szinképek, interferenciális tűnemenyek, fényelhajlási, fény-sarkítási és kettős törési kísérletek stb. vetítésére is alkalmasak. Ezen mellékeszközökről addig is, míg az ezekről szóló külön árjegyzékünk meg fog jelenni, kívánatra szívesen küldünk részletes költségvetéseket. Vetítőkészülékeinket — melyek a legtökéletesebbek — tetszés szerinti fényforrással, u. m. villamos ívfénnyel, mérszfényel, acetylénnel, borszesz-izzófényel stb. szállítjuk.

Elektromos ívlámpa

legjobb minőségű és felette erős szerkezetű (mellékelt ábra szerint) mely hajtócsavarok segélyével minden irányban könnyen mozgatható, 110—220 volt feszültségű egyen- vagy váltóáramhoz, 5—50 Ampère áramerősségig használható. Ára K 120.—

Elektromos ívlámpa

egyszerűbb és könnyebb szerkezetű. Ára K 90.—



Borszesz-izzófénylámpa légsűrítővel ellátva, mely 300 gyertya-fény erejű világítást szolgáltat. Ára teljesen felszerelve K 50.—

Háromlábú asztalállvány, mely hajtócsavar-szerkezet segélyével magasabbra és mélyebbre állítható, felső lapja pedig a vetítőkészülék által esetleg megkívánt szög alá, illetve ferde állásba hozható. Ára K 110.—

Vetítési ernyő finom vászonból 200 cm. négyzetben, gyűrűkkel ellátva. Ára K 8.—

Ernyő-állvány fenti ernyő részére, mely könnyen és gyorsan szétszedhető. Ára szekrényben K 30.—

Vetítési ernyők zsinórral felhúzható szerkezettel. — Ezen ernyők legcélszerűbben a falra erősítendő 2 vastámaszra szerelendők, azonban bárhová, esetleg közvetlenül a falra is felerősíthetők. — Az ernyők árai a következők:

	200	240	300	360	420	480 cm. négyzetben
Ára	45.—	65.—	90.—	145.—	200.—	240.— korona.

Calderoni mű- és tanszervállalat részvénytársaság, Budapest, IV., Váci-utca 50.

Részletes nagy árjegyzék vetítőkészülékeinkről munkában van.

50255

MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI LAPOK

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT MEGBIZÁSÁBÓL

SZERKESZTIK

FEJÉR LIPÓT és ZEMPLÉN GYŐZŐ

HUSZONHARMADIK ÉVFOLYAM

III. FÜZET

1914

MÁRCZIUS.

BUDAPEST

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT

1914.



TARTALOM.

	Lap
GEÖCZE ZOÁRD: Koczkát kitöltő, zérus területű felület példája...	115
TILLINGER ISTVÁNKA: A transcendens egész függvények növekedésének vizsgálata kapcsolatban az analitikai függvények szingularitásainak vizsgálatával	118
BARTONIEK EMIL: A Röntgensugarak természetéről	144
<i>Physikai Szemle</i> : Hidrogén- nitrogén- és oxigén-cső sugarak fénykeltése (VEGARD — KÜSSLER) 157. l. — A cső sugarak szekundér-sugárzása (BAERWALD — KÜSSLER) 159. l.	
<i>Physikai laboratórium</i> : Egyszerű higanymegszakító elektromágnessel hajtott inga számára (SCHULLER) 161. l.	
<i>Irodalom</i> : Die Theorie der Strahlung und der Quanten (ZEMPLÉN) 164. l. — Tables annuelles des constantes et données numériques 167. l. —	
Javítandó	168

Értesítjük olvasóinkat, hogy folyó évi január elsejétől fogva e Lapok szerkesztését az alulírottak vették át. E munkánkban az eddigi szellemhez óhajtván ragaszkodni, hangsúlyozzuk t. munkatársaink előtt, hogy igen szívesen közlünk oly rövid és alapos dolgozatokat, a melyek a tudománynak különösen újabb eredményeit könnyen érthető modorban ismertetik.

Fejér Lipót és Zemplén Győző.

A folyóirat szellemi részét illető közlemények (cikkek, feladatok stb.) a szerkesztőkhöz küldendők, és pedig a matematikai tárgyuak *Fejér Lipót* (V., Falk Miksa-uteza 15.), a fizikai tárgyuak pedig *Zemplén Győző* (I., Fehérvári-út 54/a) címére. T. munkatársainkat kérjük, hogy kézírataikra mindenkor írják fel a pontos címet, melyre a korrekciókat küldendők.

Minden szerzőnek 25 pld. különlenyomatot adunk üres borítókkal (kivéve az *Irodalom*, *Physikai Szemle*, *Physikai Laboratórium*, *Megoldott feladatok* stb. rovatokban megjelent közleményeket). Címzett borítékot vagy több különlenyomatot csak külön kívánságra, a megfelelő költségek felszámításával adhatunk.

Társulati mondanivalók. A huszonharmadik társulati év 1914 január elsején kezdődött.

A **tagsági díj** (Budapesten 10 korona, vidéken 6 korona) az Alapszabályok VII., 12. §-a szerint az év első negyedében esedékes. Kérjük t. Tagtársainkat, szíveskedjenek a tagsági díjat a társulat pénztárnoka: *Privorszky Alajos* (VII., Ilka-u. 32) címére beküldeni. A mult évekről hátralékban lévő tagtársainkat sürgősen kérjük a tagsági díj beküldésére. **A befizetések megkönnyítése végett januári füzetünkhöz postai befizető lapokat mellékelünk.**

Kérjük tagtársainkat, hogy mindazokat, a kik a matematika vagy fizika iránt érdeklődnek, tagokul ajánlják. A tagajánlások és a társulat ügyeire vonatkozó egyéb kérdések *Zemplén Győző* ügyvivő titkár fenti címére intézendők.

A reklamációk, címváltozások a pénztárnokhoz intézendők.

MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI LAPOK

E folyóirat évenként 8, legalább három ívnyi füzetben jelenik meg, a nyári hónapok kivételével, a hó második felében.

Előfizetési díj egy évre 10 K, A Matematikai és Physikai Társulat tagjai a folyóiratot tagságdíjuk fejében kapják.

23. évfolyam.

1914, márczius.

3. füzet.

KOCSKÁT KITÖLTŐ, ZÉRUS TERÜLETŰ FELÜLET PÉLDÁJA.

Legyenek x, y, z derékszögű pontkoordináták. Az u és v változók csakis a

$$0 \leq u \leq 1, \quad 0 \leq v \leq 1$$

feltételeknek téve eleget, legyenek $\varphi(u, v)$, $\phi(u, v)$, $\chi(u, v)$ e változóknak egyértékű, határolt és folytonos függvényei.

Mindama pontok halmazából álló idomot, a melyek x, y, z koordinátái rendre φ, ϕ, χ -vel egyenlők (a φ, ϕ, χ függvények által definiált) felületnek nevezzük. A felület jele S legyen.

Kimutatjuk, hogy léteznek oly felületek, a melyek egy kocka testét kitöltik s a melyek területe zérus.

E végből előbb definiálom a felület területét. Aztán kimutatom, hogy ha a φ, ϕ, χ csakis a v függvényei a felület területe zérus. Ha tehát $\bar{\varphi}(v)$, $\bar{\phi}(v)$, $\bar{\chi}(v)$ a v -nek ($0 \leq v \leq 1$) oly egyértékű, határolt és folytonos függvényei, hogy az

$$x = \bar{\varphi}(v), \quad y = \bar{\phi}(v), \quad z = \bar{\chi}(v)$$

egyenletek által definiált görbe egy kockát tölt ki,¹ úgy a $\bar{\varphi}, \bar{\phi}, \bar{\chi}$ által definiált S_1 felület kockát tölt ki és területe zérus.

Az S területe ama poliedrális felületek területének a leg-

¹ Ily görbék létezését PEANO mutatta ki.

kisebb határértéke, a melyek az S felé egyenletesen konvergálnak.

u és v derékszögű pontkoordinátáknak tekintetvén a

$$0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1$$

feltételeknek eleget tevő pontok egy P négyzetet képeznek. Bontsuk fel a P négyzetet q^2 , $q = 2, 3, \dots$, négyzetre, az u , illetve a v tengellyel parallel egyenesek segélyével (e négyzetek oldalai $\frac{1}{q}$ hosszúságúak).

Bontsuk e négyzetek mindegyikét az

$$u+v=0$$

egyenessel parallel átlója által két-két háromszögre.

A P így $2q^2$ háromszögre lesz bontva. Legyenek A, B, C egy-egy ily háromszög szögpontjai.

Ha a P egy pontjának a koordinátái u, v , jelölje M^0 azon pontot, a melynek x, y, z koordinátái rendre $\varphi(u, v)$, $\psi(u, v)$, $\chi(u, v) - M^0$ nyilván az S pontja.

Legyen Δp a $2q^2 A^0 B^0 C^0$ féle (egyenesvonalú) háromszögből álló idom. Nyilvánvaló, hogy Δq $q = \infty$ -re egyenletesen konvergál az S felé.

Ha φ, ψ, χ csakis a v függvényei $A^0 B^0 C^0$ területe zérus. Ugyanis az A, B, C pontok felvételi módja miatt, e pontok közül kettőnek a v koordinátái egyenlők s így az A^0, B^0, C^0 pontok közül ekkor legalább kettő egybeeső.

Ámde ekkor így a Δq területe — a mi nem más, mint a $2q^2$ számú $A^0 B^0 C^0$ féle háromszög területének az összege — zérus. Azaz az S_1 felület területe zérus, mert a Δq sorozat területének a limese zérus s a terület nem negatív.

Az S_1 -nek akármily síkra való merőleges vetülete nyilván tartalmaz egy oly körlapot, a melynek átmérője a koczka élével egyenlő. Továbbá: Δq az S_1 felé egyenletesen konvergál és Δq területe zérus.

Ezeket tekintetbe véve, az S_1 triviális példájából, a következő, a rendes térszemlélettel ellenkező tény következik:

Egy felületnek akármily síkra való merőleges vetülete tartalmazhat egy a siktól független átmérővel bíró körlapot. A felület felé egyenletesen konvergáló poliédersorozat poliédereit a síkra merőlegesen vetítve, a vetület területe, a sorozat bármily nagy sorszámú tagjánál is, kisebb lehet a kör területének a felénél.

Geöcze Zoárd.

A TRANSCENDENS EGÉSZ FÜGGVÉNYEK.

NÖVEKEDÉSÉNEK VIZSGÁLATA KAPCSOLATBAN AZ ANALITIKAI FÜGGVÉNYEK SZINGULARITÁSAINAK VIZSGÁLATÁVAL.

(Második közlemény.)

2. §. Egész függvénnyel képzett függvény- előállítások.

6. Ha az analitikai függvényt a MITTAG-LEFFLER által¹ adott *egész függvényes* ábrázolással állítjuk elő, a (γ) sorozat növekedése összefüggést mutat a szingularitások növekedésével. Ezen előállítást következőképen értelmezi MITTAG-LEFFLER:

Adva

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

egész függvény, mely eleget tesz a következő két feltételnek:

1. $G(x)$ a 0 felé tart, mikor x a pozitív valós tengelyt kivéve bármely $0-\infty$ vektoron a végtelen felé tart, ellenben mikor x a pozitív valós tengelyen tart a végtelen felé $F(x)$ pozitív végtelen felé tart.

2. ω -val pozitív számot jelölve

$$\lim_{\omega=\infty} \frac{F(\omega x)}{F(\omega)} = 0$$

és e sorozat egyenletesen tart a 0 felé, míg x a valós tengelynek $x=1$ től ∞ -ig terjedő részétől különböző véges tartományba esik.

¹ MITTAG-LEFFLER : 5. Note. Acta Math. 29. k.

Nevezzük $FA(x)$ -nek az $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ konstansokhoz tartozó bármely függvényágot, A -nak a főcsillagtartományt, mindig képezhetjük a fent elsorolt feltételeknek megfelelő egész függvénynyel és az a_n konstansokkal az

$$M_\gamma(x) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} (a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n) b_n \gamma^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n \gamma^n}$$

kifejezést úgy, hogy

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} M_\gamma(x) = FA(x)$$

az A csillagtartományban.

DIENES P. és V. összegező függvénynek a LINDELÖF-féle¹

$$G(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{[\log(n+\beta)]^n} \quad \beta < 1$$

és a MITTAG-LEFFLER által adott²

$$G(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{e^{n(\log n)^a}} \quad a < 1$$

egész függvényt választották és kimutatták,³ hogy az így képzett MITTAG-LEFFLER-féle általános összeg és az analitikai függvény algebrai, logaritmikus és algebrai logaritmikus szingularitásai között általános összefüggés áll fenn. Még pedig, ha

$$F(x) = \frac{A_r \left(\log \frac{1}{1-x} \right)}{(1-x)^k} + F_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

¹ LINDELÖF: Sur la détermination de la croiss. des fonet. ent. Bulletin de Sc. Math. 1903. 224–225. old.

² MITTAG LEFFLER: 5. Note 145. old.

³ DIENES P. és V.: Id. mű.

a hol $F_1(x)$ rendje $k_1 < k$ és

$$s_n = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$$

akkor, ha

$$M_{\gamma}(x) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} s_n \frac{\gamma^n}{[\log(n+\beta)]^n}}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\gamma^n}{[\log(n+\beta)]^n}}$$

$$\lim_{\gamma=\infty} \frac{M_{\gamma}(x)}{\gamma^r e^{k\gamma}} = c A_r$$

c = állandó.

Ha pedig

$$M_{\gamma}(x) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} s_n \frac{\gamma^n}{e^n (\log n)^{\alpha}}}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\gamma^n}{e^n (\log n)^{\alpha}}}$$

akkor

$$\lim_{\gamma=\infty} \frac{M_{\gamma}(x)}{e^{kc} (\log \gamma)^{\frac{1}{\alpha}} (\log \gamma)^{\frac{1}{\alpha}}} = c_1 A_r$$

c_1 véges szám.

Ugyancsak kimutathatjuk, hogy ha

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{[\log_h(x+\beta)]^n} \quad \beta < e^{\frac{e}{h-1}}$$

tehát, ha

$$M_{\gamma}(x) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} s_n \frac{\gamma^n}{[\log_h(\gamma+\beta)]^n}}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\gamma^n}{[\log_h(x+\beta)]^n}}$$

akkor

$$\lim_{\gamma=\infty} \frac{M_{\gamma}(x)}{[f(\gamma)]^k [\log f(\gamma)]^r} = k$$

a hol k véges szám és $f(\gamma)$ a $\log_h(n)$ függvénynek inverz függvényével megegyező rendű. (Ezt később bizonyítjuk.)

7. És általában, ha

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{[\log(n+\beta_1)^{a_1}]^{a'_1 n} [\log_2(n+\beta_2)^{a_2}]^{a'_2 n} \dots [\log_l(n+\beta_l)^{a_l}]^{a'_l n}} \quad (2)$$

$\beta_e < e^{\frac{e}{l-1}}$, $a_1, \dots, a_l, \dots, a'_1, \dots, a'_l$ pozitív számok, akkor

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} \frac{M_\gamma(x)}{[f_2(\gamma)]^k [\log f_1(\gamma)]^\gamma} = k$$

a hol k véges szám, nem nulla és $f_1(\gamma)$ az egész függvény együtthatóiból meghatározható; ezt hosszas számítások elkerülése végett most nem bizonyítjuk; egy később megállapítandó az egész függvények növekedésére vonatkozó tételnek egyszerű következménye lesz. Kimutatjuk azonban, hogy (2) összegező függvénynek használható, vagyis hogy eleget tesz MITTAG-LEFFLER által kiszabott két feltételnek.

LE ROY tétele¹ értelmében: Ha adva $c(z)$ a $z = \alpha + i\beta$ változónak analitikai függvénye, mely eleget tesz a következő két feltételnek:

1. $c(z)$ holomorf az $\alpha \geq \tau$ félsíkon.
2. Létezik $\vartheta < \pi$ szám, úgy hogy ε -nal jelölve egy tetszőleges kis pozitív számot

$$|c(\tau + \varrho e^{i\psi})| < \varrho^{\ell(\vartheta + \varepsilon)} - \frac{\pi}{2} \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}$$

bizonyos véges határt túlhaladó ϱ -tól kezdve, akkor az $x = \varrho e^{i\theta}$ változónak függvénye

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c(n) x^n$$

¹ LE ROY: Sur les séries div. et les fonct. def. par un devel. de TAYLOR Annales de Toulouse 1900. 2. kötet. 363. old. és LINDELÖF Calculs des Residus 1905. GAUTHIER VILLARS 109. old.

holomorf minden x értékre, mely a

$$\vartheta < \theta < 2\pi - \vartheta$$

szögtartományban fekszik.

Ezen feltételek mellett, ha $\tau > -1$, $F(x)$ a következő alakban írható:¹

$$F(x) = x^\tau \varepsilon(x)$$

a hol $\varepsilon(x)$ -szel oly függvényt jelöltünk, mely $\frac{1}{x}$ -szel 0 felé tart a

$$\vartheta + \sigma \leq \theta \leq 2\pi - \vartheta - \sigma$$

szög belsejében, bármily kicsiny pozitív szám legyen σ .

Ha $\vartheta = 0$, akkor $F(x)$ — a valós tengely $1 - \infty$ részétől eltekintve — holomorf az egész síkon.

Ha $F(x)$ egész függvény és $c(z)$ holomorf az $a \geq 0$ félsíkon, akkor, mivel $\tau = 0$, $F(x)$ zérussá lesz a

$$\sigma < \theta \leq 2\pi - \sigma$$

szögtartományban a pozitív valós tengelyt kivéve bármely vektor mentén haladva a végtelen felé és végtelenné lesz, ha x -szel a pozitív valós tengely mentén haladunk a végtelen felé. Ez pedig első követelménye annak, hogy $F(x)$ összegező függvény lehessen.

Alkalmazzuk ezt (2) függvényre.

$$c(z) = \{[\log(z + \beta_1)^{a_1}]^{a'_1} [\log_2(z + \beta_2)^{a_2}]^{a'_2} \dots [\log_l(z + \beta_l)^{a_l}]^{a'_l}\}^{-z}$$

$c(z)$ holomorf az $a \geq 0$ félsíkon és

$$|c(z)| < e^{\varepsilon|z|}$$

mert

$$\begin{aligned} c(z) &= e^{-z \{a_1 \log_2(z + \beta_1)^{a_1} + a'_2 \log_3(z + \beta_2)^{a_2} + \dots + a'_l \log_{l+1}(z + \beta_l)^{a_l}\}} \\ &= e^{-za'_1 \log_2(z + \beta_1)^{a_1}} e^{-za'_2 \log_3(z + \beta_2)^{a_2}} \dots e^{-za'_l \log_{l+1}(z + \beta_l)^{a_l}}. \end{aligned}$$

¹ LINDELÖF: Calculs d. R. 113. old.

Mindegyik tényezőről külön-külön bebizonyítható, hogy abszolút értékre $< e^{\varrho \varepsilon_l}$ ($l=1, 2, \dots, l$)

Nézzük az első tényezőt:

$$\begin{aligned} e^{-z a'_1 \log_2 (z + \beta_1)^{a_1}} \\ \log_2 (z + \beta_1)^{a_1} &= \log a_1 + \log_2 (z + \beta_1) = \\ &= \log a_1 + \log_2 (\varrho e^{i\psi}) = \\ &= \log a_1 + \log [\log \varrho + i\psi], \end{aligned}$$

mivel

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log n \log \left(1 + \frac{k}{\log n} \right) = k$$

azért

$$\begin{aligned} \log (\log \varrho + i\psi) &= \log \left[\log \varrho \left(1 + \frac{i\psi}{\log \varrho} \right) \right] = \\ &= \log_2 \varrho + \log \left(1 + \frac{i\psi}{\log \varrho} \right) = \\ &= \log_2 \varrho + \frac{i\psi + \varepsilon_\varrho}{\log \varrho} \quad \lim_{\varrho \rightarrow \infty} \varepsilon_\varrho = 0 \end{aligned}$$

úgy hogy

$$\log_2 (z + \beta_1)^{a_1} = \log a_1 + \log_2 \varrho + \frac{i\psi + \varepsilon_\varrho}{\log \varrho}$$

és

$$\begin{aligned} e^{-a'_2 z \log_2 (z + \beta_1)^{a_1}} &= e^{-a'_1 \varrho (\cos \psi + i \sin \psi) \left[\log a_1 + \log_2 \varrho + \frac{i\psi + \varepsilon_\varrho}{\log \varrho} \right]} = \\ &= e^{-a'_1 \varrho \left[\cos \psi \log a_1 + \cos \psi \log_2 \varrho - \frac{\sin \psi + \varepsilon_\varrho}{\log \varrho} + i\alpha(\varrho) \right]} \end{aligned}$$

$\alpha(\varrho)$ -val jelöltük a kitevő képzetes részét.

$$\begin{aligned} \left| e^{-z a'_1 \log_2 (z + \beta_1)^{a_1}} \right| &= e^{-a'_1 \varrho \left[\cos \psi \log a_1 + \cos \psi \log_2 \varrho - \psi \frac{\sin \psi + \varepsilon_\varrho}{\log \varrho} \right]} < \\ &< e^{\varrho \frac{a'_1 \psi (\sin \psi + \varepsilon_n)}{\log \varrho}} = e^{\varrho \varepsilon_1} \end{aligned}$$

bizonyos véges értéknél nagyobb ϱ -tól kezdve; ε_1 tetszőszerinti kis pozitív szám.

Az l . tényező

$$\left| e^{-a'_l \log_{l+1} (z + \beta_l)^{a_l}} \right| < e^{\varrho \frac{a'_l \psi (\sin \psi + \varepsilon_n)}{\log \varrho \log_2 \varrho \dots \log_l \varrho}} = e^{\varrho \varepsilon_l}$$

ε_l tetszésszerűen kis pozitív szám, bizonyos elég nagy ρ -tól kezdve.

Tehát

$$|c(z)| < e^{\rho(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_l)}.$$

Irhatjuk

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_l = \varepsilon,$$

úgy hogy

$$|c(z)| < e^{\rho\varepsilon}$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$$

(2) tehát oly egész függvény, mely eleget tesz MITTAG-LEFFLER 1. feltételének, mert alkalmazható rá LE ROY-LINDELÖF tétele.

Hogy a 2. feltételnek is eleget tesz, az DIENES P. és V. következő tételéből látható:¹

Minden oly $G(x)$ egész függvény, melynek együtthatói pozitívek és $\frac{1}{x}$ -szel egyenletesen tart 0 felé az

$$\varepsilon \leq \theta \leq 2\pi - \varepsilon$$

szögben bármily kicsiny is legyen ε , mindig eleget tesz a következő feltételnek:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{G(\omega^\omega)}{G(\omega)} = 0.$$

Ezek alapján láthatjuk, hogy (2) összegező függvénynek használható.

MITTAG-LEFFLER és MALMQUIST² is adnak példát ilyen egész függvényekre. Ezeknek speciális vizsgálatára nem térünk ki, csak utalni akartunk arra, hogy létezik az egész függvényeknek egész osztálya, mely összegezési függvénynek használható.

8. Nem lehetne-e a megfelelő egész függvények között olyant találni, mellyel képezve a MITTAG-LEFFLER-féle általános összeget, ezen összeg nagyságrendje a szinguláris pontban meg egyeznék a vizsgált függvény nagyságrendjével? Melyik azon egész függvény, melyet összegezési függvénynek használva,

¹ DIENES P. és V.: Id. mű 192. old.

² MALMQUIST: Étude d'une fonction entière. Acta Math. 29. k.

oly egyszerű összefüggéseket nyerjünk az $F(x)$ függvény csillagtartományából kizárt félegyenések kezdőpontjában levő szingularitások és az általános összeg között, mint a mily egyszerű eredményekhez jutunk, ha a BOREL-féle exponenciális összeggel vizsgáljuk a függvényt az összegezési sokszög határára levő szinguláris pontokban. Hogy ezen kérdésre felelhesünk, szükségünk van az egész függvények növekedésére vonatkozó néhány összefüggésre. Azért áttérünk az egész függvények növekedésének vizsgálatára.

3. §. A Taylor-sorral adott egész függvények növekedésének vizsgálata. A sor tagjai azon csoportjának megállapítása, melyek meghatározzák az egész függvény nagyságrendjét.

9. Pozitív együtthatókkal bíró egész függvényeket fogunk vizsgálni és tanulmányozni fogjuk azon összefüggést, mely az együtthatók fogyása és az egész függvény növekedése között fennáll.

POINCARÉ,¹ HADAMARD,² BOREL,³ LE ROY,⁴ LINDELÖF⁵ foglalkoztak e kérdéssel.

HADAMARD általános tételt ad, mert az együtthatókra, a b_n -kre általános feltételt szab és kimutatja, hogy

$$G(x) < x^e e^{\int \frac{p(x)}{x} dx}$$

¹ POINCARÉ: Sur les fonct. entières. Bulletin de la Soc. Math. 1883.

² HADAMARD: Études des propriétés des fonct. entières etc. Journal des Math. 1903.

³ BOREL: Sur les series à termes pos. Gauthier Villars 1902.

⁴ LE ROY: Valeurs asymp. de certaines series procédant suivant les puiss. ent. et pos. d'un variable réelle. Bulletin des Sciences Math. 1900.

⁵ LINDELÖF: Id. mű, továbbá: Mémoire sur la théorie des fonct. entières de genre fini. Acta societatis scientiarum feniciæ. No. I. XXXI. k. 190. lap.

ϕ -vel jelölve a $(b_n)^{-\frac{1}{n}}$ inverz függvényét és ε -nal egyelőre megadott tetszőszerinti kis pozitív számot.

LE ROY határozott integrál kiszámítására vezeti vissza a problémát és nyer $G(x)$ -re oly megközelítő kifejezést, melynek viszonya $G(x)$ -hez $x = \infty$ -nel az egység felé tart.

BOREL ad egy példát, melyre kimutatja, hogy bármily nagy legyen is x , a sorban van végtelen sok tag, mely a sor nagyságrendjére nincs befolyással. Azt is kimutatja BOREL, hogy egy tagnak — a maximális tagnak — döntő szerepe van az általa vizsgált egész függvény nagyságrendjének meghatározásánál.

LINDELÖF BOREL-lel egy időben általánosabban is kimutatta, hogy — ha a maximális tagot $M(x)$ -szel jelöljük — $G(x)$ növekedését meghatározza a következő egyenlőtlenség:

$$M(x) < G(x) < \phi(x) M(x)$$

LINDELÖF egyes speciális alakú egész függvények esetén pontosabb megközelítést is ad.¹

10. Mi LINDELÖF vizsgálatait vesszük alapul és kimutatjuk először, hogy az a módszer, mellyel LINDELÖF speciális egész függvények megközelítő értékét számítja ki egész általánosan használható az egész függvények nagyságrendjének meghatározására. Ennek segítségével azután bebizonyítjuk a következő tételt:

Ha adva $F_1(x)$ analitikai függvény $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ pozitív együtt-hatójú sorral, hol a_n n -ben k -ad fokú polinóm; adva továbbá

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

egész függvény, a hol

$$\frac{1}{b_n} = e^{ng(n)}$$

és $g(n)$ pozitív, n -nel folytonosan nő végtelenig és van első és második differenciálhányadosa, akkor az

¹ LINDELÖF: Acta feniciae 36. old. és Bulletin id. mű.

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n x^n$$

egész függvény növekedését pontosan megadja a következő kifejezés:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F(x)}{[f(x)]^k G(x)} = k \quad (\text{I})$$

(k véges, nem nulla pozitív szám.)

ahol $f(x)$ nagyságrendje megegyezik $e^{g(n)}$ inverz függvényének nagyságrendjével.

11. Hogy e tételt bizonyíthassuk, előbb kimutatjuk, hogy a fenti

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

egész függvény nagyságrendjének meghatározásánál eltekinthetünk a sor elején és végén levő tagoktól, még pedig, ha $M(x)$ jelenti $G(x)$ maximális tagját, a ezen maximális taghoz tartozó n értéket, τ pedig egy az $\frac{1}{2}$ -nél nagyobb és az 1-nél kisebb számot, akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{n=0}^{\alpha - \alpha^\tau} b_n x^n}{G(x)} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \alpha + \alpha^\tau} \frac{\sum_{n=\alpha + \alpha^\tau}^{\infty} b_n x^n}{G(x)} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \alpha - \alpha^\tau} \frac{\sum_{n=\alpha - \alpha^\tau}^{\alpha + \alpha} b_n x^n}{G(x)} = 1. \quad (\text{II})$$

12. Az $M(x)$ maximális tag meghatározása. x -nek fix értéket adva

$$\frac{x^n}{e^{ng(n)}}$$

kifejezést n függvényének tekintve meghatározzuk e kifejezés maximumánál n pozitív értékeire. Logaritmikus differenciálhányadosát zérussal tesszük egyenlővé

$$\log x - g(n) - ng'(n) = 0. \quad (\text{3})$$

Ez az egyenlet megadja a maximális tag rangját n -t. Jelöljük n ezen értékét α -val. Az utóbbi egyenlethől nyert α -hoz legközelebb eső egész számot vesszük (3)-ból

$$\log x = g(a) + \alpha g'(a)$$

innen

$$x = e^{g(a) + \alpha g'(a)} \quad (4)$$

tehát

$$M(x) = \left[\frac{x}{e^{g(a)}} \right]^\alpha$$

 x fenti értékét helyettesítve

$$M(x) = e^{\alpha^2 g'(a)} \quad (5)$$

$M(x)$ x -nek folytonos és növekvő függvénye. α (4)-ből mint x növekvő függvénye határozható meg.

13. Az általános tag L_n és a maximális tag $M(x)$ viszonya és a sor tagjainak négy csoportja.

$$\begin{aligned} \frac{L_n}{M(x)} &= \left(\frac{x}{e^{g(n)}} \right)^n : \left(\frac{x}{e^{g(a)}} \right)^\alpha = \left(\frac{x}{e^{g(a)}} \right)^n \left(\frac{e^{g(a)}}{e^{g(n)}} \right)^n : \left(\frac{x}{e^{g(a)}} \right)^\alpha = \\ &= \left(\frac{x}{e^{g(a)}} \right)^{n-\alpha} \left(\frac{e^{g(a)}}{e^{g(n)}} \right)^n = [M(x)]^{\frac{n-\alpha}{\alpha}} \left(\frac{e^{g(a)}}{e^{g(n)}} \right)^n \end{aligned}$$

 $M(x)$ értékét betéve

$$\frac{L_n}{M(x)} = [e^{\alpha^2 g'(a)}]^{n-\alpha} e^{n[g(a)-g(n)]} = e^{\alpha(n-\alpha)g'(a) + n[g(a)-g(n)]}.$$

Legyen τ egy az $\frac{1}{2}$ és 1 közt levő pozitív szám és osszuk az

$$\frac{F(x)}{M(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n}{M(x)}$$

kifejezés tagjait négy csoportba. E csoportokat jellemezze a következő négy egyenlőtlenség:

$$\begin{aligned} 1. \quad & n < a - \alpha^\tau \\ 2. \quad & a - \alpha^\tau < n < a + \alpha^\tau \\ 3. \quad & a + \alpha^\tau < n < \phi(x) \\ 4. \quad & \phi(x) < n \end{aligned} \quad (6)$$

$\phi(x)$ az $e^{g(n)}$ -nek inverz függvénye, tehát x -szel végtelenné válik. $\phi(x) = n_1$ az n -nek azon értéke, melynél

$$\frac{x}{e^{g(n_1)}} = 1.$$

Ebből

$$x = e^{g(n_1)}$$

és

$$n_1 = \phi(x).$$

14. a és $\phi(x)$ közti összefüggés megállapítása.

A maximális tag keresésénél nyertük

$$x = e^{g(a) + ag'(a)}$$

ezt (7)-tel összevetve

$$e^{g(a) + ag'(a)} = e^{g(n_1)}.$$

Mindkét oldal logaritmusát véve

$$g(n_1) = g(a) + ag'(a)$$

vagy

$$g(n_1) - g(a) = ag'(a). \quad (8)$$

15. a $g'(n)$ nem fogy. Alkalmazva a közép értéktételt

$$g(n_1) - g(a) = (n_1 - a) g'(pa). \quad a < pa < n_1$$

Ezt (8)-czal összevetve

$$(n_1 - a) g'(pa) = ag'(a)$$

$ag'(pa)$ -val osztva mindkét oldalon

$$\frac{n_1 - a}{a} = \frac{g'(a)}{g'(pa)},$$

ebből

$$\frac{n_1}{g} = 1 + \frac{g'(a)}{g'(pa)}.$$

Mivel

$$g'(a) \leq g'(pa)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_1}{a} = k. \quad k \text{ véges és } > 0 \quad (9)$$

16. $b.$ eset, $g'(n)$ fogy. Itt két eset lehetséges:

$$\alpha) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ng'(n)}{g(n)} = 0 \quad (10)$$

$$\beta) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ng'(n)}{g(n)} = c \quad c \text{ véges és } > 0 \quad (11)$$

a) eset $g(n_1)$ -t TAYLOR-sorba fejtvé a második tagig

$$g(n_1) - g(a) = (n_1 - a) g'(a) + \frac{(n_1 - a)^2}{2} g''(pa), \quad a < pa < n_1$$

Ezt (8)-czal összevetve

$$ag'(a) = (n_1 - a) g'(a) + \frac{(n_1 - a)^2}{2} g''(pa)$$

$g'(a)$ -val osztva

$$a = (n_1 - a) + (n_1 - a) \frac{n_1 - a}{2} \frac{g''(pa)}{g'(a)}$$

ez írható

$$a = (n_1 - a) \left[1 + \frac{n_1 - a}{2} \frac{g''(pa)}{g'(a)} \right]$$

vagy

$$n_1 - a = \frac{a}{1 + \frac{n_1 - a}{2} \frac{g''(pa)}{g_1(a)}}$$

a -val osztva nyerjük

$$\frac{n_1}{a} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{n_1 - a}{2} \frac{g''(pa)}{g'(a)}}. \quad (12)$$

A jobboldalon álló kifejezést nagyobbítjuk, ha a tört nevezőjét kisebbítjük, vagyis ha $g''(pa)$ helyébe $g''(a)$ -t teszünk.

U. i. $g'(n)$ fogyó függvény, de

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{1+\eta} g'(n) = \infty \quad (13)$$

η tetszésszerinti kis pozitív szám. (13) könnyen belátható, ha meggondoljuk, hogy $g(n)$ folytonosan növvő függvény. Tegyük fel, hogy (13) nem áll, hanem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{1+\eta} g'(n) = c$$

c véges szám és > 0 ; ekkor

$$g'(n) = \frac{c + \varepsilon_n}{n^{1+\eta}}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$$

Integrálva

$$g(n) = \int \frac{c + \varepsilon_n}{n^{1+\eta}} dn$$

$c + \varepsilon_n$ maximális értékét k -val jelölve

$$\int \frac{c + \varepsilon_n}{n^{1+\eta}} dn < k \int \frac{1}{n^{1+\eta}} dn$$

$$g(n) = -k \frac{1}{\eta n^\eta},$$

a mi abszurdum. Tehát (13) igaz. Van tehát oly

$$h(n) < n^{1+\eta}$$

növő függvény, hogy

$$h(n) g'(n) = c + \varepsilon_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$$

c véges szám. Mindkét oldalt differenciálva:

$$h'(n) g'(n) + h(n) g''(n) = \varepsilon'_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon'_n = 0$$

ebből

$$g''(n) = - \frac{h'(n) g'(n) - \varepsilon'_n}{h(n)}$$

a jobboldalon álló kifejezés abszolút értéke < 1 , $g''(n)$ negatív, mivel $g'(n)$ fogyó függvény, tehát $g''(n)$ n végtelennel 0-ig nő; tehát

$$g''(pa) > g''(a).$$

Ez alapon (12)-ből

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 + \frac{n_1 - a}{2} \frac{g''(pa)}{g'(a)}} &< \frac{1}{1 + \frac{n_1 - a}{2} \frac{g''(a)}{g'(a)}} \\ \frac{n_1 - a}{2} \frac{g''(pa)}{g'(a)} &> \frac{n_1 - a}{2} \frac{g''(a)}{g'(a)}. \end{aligned} \quad (14)$$

Ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_1 - a}{2} \frac{g''(pa)}{g'(a)} = -1,$$

akkor egyrészt (12)-re való tekintettel

$$\lim_{n=\infty} \frac{n_1}{a} = \dots$$

másrészt az utolsó egyenlőtlenség alapján

$$\lim_{n=\infty} \frac{n_1}{a} < 3,$$

mert

$$\lim_{n=\infty} \frac{n_1 - a}{2} \frac{g''(a)}{g'(a)} \leq \lim_{n=\infty} \frac{n_1 - a}{2} \frac{g''(pa)}{g'(a)}.$$

A feltevés szerint tehát

$$\lim_{n=\infty} \frac{n_1 - a}{2} \frac{g''(a)}{g'(a)} \leq -1,$$

azaz

$$\frac{n_1 - a}{2} \frac{g''(a)}{g'(a)} \leq -1 + \varepsilon_n \quad \lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 0 \quad (15)$$

$\frac{g''(a)}{g'(a)}$ határértékét meg tudjuk határozni. (8) egyenlet mindkét oldalát $g(a)$ -val osztva

$$\frac{g(n_1)}{g(a)} = 1 + \frac{ag'(a)}{g(a)}$$

tekintettel a) feltételre

$$\lim_{n=\infty} \frac{g(n_1)}{g(a)} = 1 \quad (16)$$

L'HOPITAL szerint

$$\lim_{n=\infty} \frac{g(n_1)}{g(a)} = \lim_{n=\infty} \frac{g'(n_1) n'_1}{g'(a)} \quad (17)$$

$g'(n_1)$ -t nyerjük, ha (8) mindkét oldalát differenciáljuk:

$$g'(n_1) n'_1 = 2g'(a) + ag''(a)$$

$g'(a)$ -val osztva

$$\frac{g'(n_1) n'_1}{g'(a)} = 2 + \frac{ag''(a)}{g'(a)} \quad (18)$$

(16)-ra és (17)-re tekintettel, kell, hogy

$$\lim_{n=\infty} \left(2 + \frac{ag''(a)}{g'(a)} \right) = 1,$$

a mi csak úgy lehetséges, ha

$$\lim_{n=\infty} \frac{ag''(a)}{g'(a)} = -1. \quad (19)$$

Ebből

$$\frac{g''(a)}{g'(a)} = \frac{-1 + \varepsilon_n}{a} \quad \lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 0$$

ezt (15)-be téve

$$\frac{n_1 - a}{2} - \frac{-1 + \varepsilon_n}{a} \leq -1 + \varepsilon'_n,$$

$\frac{2}{-1 + \varepsilon_n}$ -nal szorozva az egyenlőség mindkét oldalát, nyerjük

$$\frac{n_1 - a}{a} \leq 2(1 + \varepsilon_n^*), \quad \lim_{n=\infty} \varepsilon_n^* = 0$$

Innen

$$\frac{n_1}{a} \leq 1 + 2(1 + \varepsilon_n^*),$$

vagyis

$$\lim_{n=\infty} \frac{n_1}{a} \leq 3.$$

Ellentmondásra jutottunk. Kell tehát, hogy

$$\lim_{n=\infty} \frac{n_1}{a} = c$$

c véges szám.

17. Ha β) feltétel áll, azaz

$$\lim_{n=\infty} \frac{ng'(n)}{g(n)} = c, \quad c \neq 0 \text{ és véges szám} \quad (11)$$

akkor

$$\lim_{n=\infty} \frac{g(n_1)}{g(a)} = 1 + c = c_1 \quad c_1 > 1 \quad (16^*)$$

és

$$\lim_{n=\infty} \frac{n_1 g'(n_1)}{g'(a)} = c_1$$

(18) alapján pedig

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{ag''(a)}{g'(a)} \right) = c_1$$

vagyis

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ag''(a)}{g'(a)} = -2 + c_1 = -c_2. \quad c_2 < 1$$

Ebből

$$\frac{g''(a)}{g'(a)} = \frac{-c_2 + \varepsilon_n}{a}. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$$

Ezen értéket (15)-be téve

$$\begin{aligned} \frac{n_1 - a}{2} \frac{(-c_2 + \varepsilon_n)}{a} &\leq -1 + \varepsilon'_n & \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon'_n &= 0 \\ \frac{n_1 - a}{a} &\leq 2 \frac{-1 + \varepsilon'_n}{-c_2 + \varepsilon_n} \\ \frac{n_1}{a} &\leq 1 + 2 \frac{-1 + \varepsilon'_n}{-c_2 + \varepsilon_n} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_1}{a} &= 1 + \frac{2}{c_2}. \end{aligned}$$

Most úgy okoskodva, mint $\alpha)$ esetben, belátjuk, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_1 - a}{2} \frac{g''(pa)}{g'(a)} \neq -1.$$

Azaz $\beta)$ esetben is

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_1}{a} = k \quad k \text{ véges szám.} \quad (20)$$

Kimutattuk tehát, hogy $n_1 = \phi(x)$ és $a = f(x)$ nagyságrendje megegyezik.

18. Az egész függvény és maximális tagja viszonyának tanulmányozása. Visszatérve a

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{G(x)}{M(x)}$$

vizsgálatára, vegyük sorba a (6) jelezte csoportokat.

Az első csoportba tartozó tagok mindegyike kisebb, mintha

$$\frac{Ln}{M(x)} = e^{\alpha(n-\alpha)g'(\alpha) + n[g(\alpha) - g(n)]} \quad (21)$$

kifejezésbe

$$n = \alpha - \alpha^\tau$$

értéket tesszük, mert a maximális tagig növekszenek a tagok.

$$\frac{L_{(\alpha-\alpha^\tau)}}{M(x)} = e^{-\alpha^{1+\tau}g'(\alpha) + (\alpha-\alpha^\tau)[g(\alpha) - g(\alpha-\alpha^\tau)]}. \quad (21^1)$$

19. $g'(n)$ nem fogy.

$g(\alpha) - g(\alpha - \alpha^\tau)$ -ra a középértéktételt alkalmazva

$$g(\alpha) - g(\alpha - \alpha^\tau) = \alpha^\tau g'(p\alpha), \quad \alpha - \alpha^\tau < p\alpha < \alpha$$

Ezen értéket (21¹)-be téve

$$\frac{L_{\alpha-\alpha^\tau}}{M(x)} = e^{-\alpha^{1+\tau}g'(\alpha) + (\alpha-\alpha^\tau)\alpha^\tau g'(p\alpha)} \leq e^{-\alpha^{1+\tau}g'(\alpha) + (\alpha-\alpha^\tau)\alpha^\tau g'(\alpha)}$$

mert

$$\begin{aligned} g'(\alpha) &> g'(p\alpha) \\ -\alpha^{1+\tau}g'(\alpha) + (\alpha-\alpha^\tau)\alpha^\tau g'(\alpha) &= -\alpha^{1+\tau}g'(\alpha) + \\ &+ \alpha^{1+\tau}g'(\alpha) - \alpha^{2\tau}g'(\alpha) = -\alpha^{2\tau}g'(\alpha) \end{aligned}$$

$$\frac{L_{(\alpha-\alpha^\tau)}}{M(x)} < e^{-\alpha^{2\tau}g'(\alpha)},$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \alpha^{2\tau}g'(\alpha) = \infty,$$

úgy hogy

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{L_{(\alpha-\alpha^\tau)}}{M(x)} = 0.$$

Azonkívül tekintetbe véve, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha^k e^{-\alpha^{2\tau}g'(\alpha)} = 0$$

k pozitív szám,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha^k \frac{L_{(\alpha-\alpha^\tau)}}{M(x)} = 0.$$

Az első csoportban a sornak legfeljebb $\alpha - \alpha^\tau$ tagja van, úgy hogy

(12)

$$\frac{\sum_{n=0}^{a-a^{\tau}} \frac{x^n}{e^{ng(n)}}}{M(x)} < (a - a^{\tau}) \frac{L(a-a^{\tau})}{M(x)},$$

következésképp

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sum_{n=0}^{a-a^{\tau}} \frac{x^n}{e^{ng(n)}}}{M(x)} = 0,$$

tehát még inkább

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sum_{n=0}^{a-a^{\tau}} \frac{x^n}{e^{ng(n)}}}{G(x)} = 0.$$

20. $g'(n)$ fogy.(21¹) kifejezésben fejtsük TAYLOR-sorba $[g(a) - g(a - a^{\tau})]$ -t a második tagig

$$g(a) - g(a - a^{\tau}) = a^{\tau} g'(a - a^{\tau}) + \frac{a^{2\tau}}{2!} g''(pa), \quad a - a^{\tau} < pa < a$$

Ezen értéket (21¹)-be téve

$$\begin{aligned} \frac{L(a-a^{\tau})}{M(x)} &= e^{-a^{1+\tau} g'(a) + (a-a^{\tau}) [a^{\tau} g'(a-a^{\tau}) + \frac{a^{2\tau}}{2!} g''(pa)]} = \\ &= e^{-a^{1+\tau} g'(a) \left[1 - \frac{(a-a^{\tau}) g'(a-a^{\tau})}{g'(a)} - \frac{(a-a^{\tau}) a^{\tau} g''(pa)}{2a g'(a)} \right]} \\ \frac{(a-a^{\tau}) g'(a-a^{\tau})}{a g'(a)} &= \frac{\left(1 - \frac{a^{\tau}}{a}\right) g' \left[\left(1 - \frac{a^{\tau}}{a}\right) a \right]}{g'(a)}. \end{aligned} \quad (21^2)$$

De

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 - \frac{a^{\tau}}{a}\right) g' \left[\left(1 - \frac{a^{\tau}}{a}\right) a \right]}{g'(a)} \leq 1,$$

mert $g(n)$ folytonosan növekvő függvény lévén

$$g \left[\left(1 - \frac{a^{\tau}}{a}\right) a \right] < g(a),$$

azaz

$$\frac{g\left[\left(1 - \frac{a^\tau}{a}\right)a\right]}{g(a)} < 1,$$

következőleg

$$\lim_{n=\infty} \frac{g\left[\left(1 - \frac{a^\tau}{a}\right)a\right]}{g'(a)} \leq 1 \quad (22)$$

L'HOPITAL szerint

$$\lim_{n=\infty} \frac{g\left[\left(1 - \frac{a^\tau}{a}\right)a\right]}{g(a)} = \lim_{n=\infty} \frac{g'\left[\left(1 - \frac{a^\tau}{a}\right)a\right]}{g'(a)} \cdot \left[\left(1 - \frac{a^\tau}{a}\right)a\right]'$$

Tekintettel (22)-re

$$\lim_{n=\infty} \frac{g'\left[\left(1 - \frac{a^\tau}{a}\right)a\right] \left[\left(1 - \frac{a^\tau}{a}\right)a\right]'}{g'(a)} \leq 1 \quad (23)$$

$$\left[\left(1 - \frac{a^\tau}{a}\right)a\right]' = -\frac{\tau a^\tau - a^\tau}{a} + 1 - \frac{a^\tau}{a} = \frac{(1-\tau)a^\tau}{a} + 1 - \frac{a^\tau}{a}$$

mivel $\tau < 1$,

$$\frac{(1-\tau)a^\tau}{a} > 0$$

és így

$$1 - \frac{a^\tau}{a} < \left[\left(1 - \frac{a^\tau}{a}\right)a\right]'$$

Erre és (22)-re tekintettel

$$\lim_{n=\infty} \frac{g'\left[\left(1 - \frac{a^\tau}{a}\right)a\right] \left(1 - \frac{a^\tau}{a}\right)}{g'(a)} \leq 1.$$

(21²)-t nagyobbítom, ha a kitevőben levő negatív számot nagyobbítom és a pozitívot kisebbítem. Mivel

$$g''(pa) < g''(a) \quad pa < a$$

és

$$-g''(pa) > -g''(a)$$

$$\begin{aligned}\frac{L_{(\alpha-\alpha^\tau)}{M(x)} &< e^{-\alpha^{1+\tau}g'(\alpha)} \left[1 - 1 - \frac{(\alpha-\alpha^\tau) \alpha^\tau g''(\alpha)}{2! \alpha g'(\alpha)} \right] = e^{\frac{1}{2}(\alpha-\alpha^\tau) \alpha^{2\tau} g''(\alpha)} = \\ &= e^{\frac{1}{2} \left[1 - \frac{\alpha^\tau}{\alpha} \right] \alpha^{1+2\tau} g''(\alpha)}.\end{aligned}$$

De azt már tudjuk, hogy

$$\frac{ag''(\alpha)}{g'(\alpha)} = -1 + \varepsilon_n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$$

Ebből $ag''(\alpha)$ értéket $\frac{L_{(\alpha-\alpha^\tau)}{M(x)}$ fenti kifejezésébe téve:

$$\frac{L_{(\alpha-\alpha^\tau)}{M(x)} < e^{-\frac{1-\frac{\alpha^\tau}{\alpha}}{2} \alpha^{2\tau} g'(\alpha) [1-\varepsilon_n]}$$

De (13) alapján

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \alpha^{2\tau} g'(\alpha) = \infty,$$

mert

$$2\tau > 1.$$

Következőleg

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{L_{(\alpha-\alpha^\tau)}{M(x)} = 0.$$

Mivel pedig nemcsak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{1+\eta} g'(n) = \infty \quad 1 + \eta = 2\tau$$

de már

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{1+\eta_1} g'(n) = \infty \quad 0 < \eta_1 < \eta$$

azért

$$n^{1+\eta} g'(n) = n^{\eta-\eta_1} n^{1+\eta_1} g'(n)$$

egyenlőségre való tekintettel

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \alpha^k \frac{L_{(\alpha-\alpha^\tau)}{M(x)} = 0,$$

a hol k tetszésszerinti nagy pozitív számot jelenthet. Úgy hogy, tekintve, hogy az első csoportban a tagok száma kisebb, mint $\alpha - \alpha^\tau$, fogyó $g'(n)$ esetén is

$$\lim_{x=\infty} \frac{\sum_{n=0}^{\alpha-\alpha^\tau} \frac{x^n}{e^{ng(n)}}}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{e^{ng(n)}}} = 0.$$

Tehát a sor első $\alpha - \alpha^\tau$ tagja nincs befolyással a $G(x)$ nagyságrendjére.

21. A harmadik csoport tagjainak vizsgálata.

$$\alpha + \alpha^\tau < n < n_1$$

$\frac{L_n}{M(x)}$ -t írjuk most következőképen

$$\frac{L_n}{M(x)} = e^{\alpha(n-\alpha)g'(\alpha) - n[g(n) - g(\alpha)]}.$$

A maximális tagtól kisebbednek a tagok, tehát a harmadik csoport tagjai kisebbek, mintha (21)-ben $n = \alpha + \alpha^\tau$ -t tesztek.

$$\frac{L_{(\alpha+\alpha^\tau)}}{M(x)} = e^{\alpha(\alpha+\alpha^\tau-\alpha)g'(\alpha) - (\alpha+\alpha^\tau)[g(\alpha+\alpha^\tau) - g(\alpha)]} \quad (21^*)$$

$g'(n)$ nem fogy.

A középértéktétel alapján

$$g(\alpha + \alpha^\tau) - g(\alpha) = \alpha^\tau g'(p\alpha), \quad \alpha < p\alpha < \alpha + \alpha^\tau$$

Ezt (21*)-be téve

$$\frac{L_{(\alpha+\alpha^\tau)}}{M(x)} = e^{\alpha^{1+\tau}g'(\alpha) - (\alpha+\alpha^\tau)\alpha^\tau g'(p\alpha)} < e^{\alpha^{1+\tau}g'(\alpha) - (\alpha+\alpha^\tau)\alpha^\tau g'(\alpha)}$$

mert $p\alpha > \alpha$ és $g'(p\alpha) > g'(\alpha)$

$$\frac{L_{(\alpha+\alpha^\tau)}}{M(x)} < e^{\alpha^{1+\tau}g'(\alpha) - \alpha^{1+\tau}g'(\alpha) - \alpha^{2\tau}g'(\alpha)} = e^{-\alpha^{2\tau}g'(\alpha)}$$

mivel

$$\lim_{\alpha=\infty} \alpha^{2\tau}g'(\alpha) = \infty,$$

$$\lim_{x=\infty} \frac{L_{(\alpha+\alpha^\tau)}}{M(x)} = 0$$

és

$$\lim_{x=\infty} \alpha^k \frac{L_{(\alpha+\alpha^\tau)}}{M(x)} = 0. \quad k \text{ pozitív szám.} \quad (24)$$

A harmadik csoportban a tagok száma $n_1 - (\alpha + \alpha^\tau)$, tehát

$$\sum_{n=\alpha+\alpha^\tau}^{n_1} \frac{L_n}{M(x)} < [n_1 - (\alpha + \alpha^\tau)] \frac{L_{(\alpha+\alpha^\tau)}}{M(x)}.$$

Előzőleg azonban már bebizonyítottuk, hogy

$$\lim_{n=\infty} \frac{n_1}{n} = k,$$

úgy, hogy tekintettel (24)-re

$$\lim_{x=\infty} \frac{\sum_{n=\alpha+\alpha^\tau}^{n_1} \frac{x^n}{e^{ng(n)}}}{M(x)} = 0,$$

tehát még inkább

$$\lim_{x=\infty} \frac{\sum_{n=\alpha+\alpha^\tau}^{n_1} \frac{x^n}{e^{ng(n)}}}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{e^{ng(n)}}} = 0.$$

22. $g'(n)$ fogy.

$g(\alpha + \alpha^\tau) - g(\alpha)$ -t a második tagig TAYLOR-sorba fejtvé

$$g(\alpha + \alpha^\tau) - g(\alpha) = \alpha^\tau g'(\alpha) + \frac{\alpha^{2\tau}}{2} g''(p\alpha). \quad \alpha < p\alpha < \alpha + \alpha^\tau$$

Ezt (21*)-be téve

$$\begin{aligned} \frac{L_{(\alpha+\alpha^\tau)}}{M(x)} &= e^{\alpha^{1+\tau} g'(\alpha)} - (\alpha + \alpha^\tau) \alpha^\tau g'(\alpha) - \frac{(\alpha + \alpha^\tau) \alpha^{3\tau}}{2} g''(p\alpha) = \\ &= e^{-\alpha^{2\tau} g'(\alpha)} - \left(1 + \frac{\alpha^\tau}{\alpha}\right) \frac{\alpha^{1+2\tau}}{2} g''(p\alpha) < \\ &< e^{-\alpha^{2\tau} g'(\alpha)} - \left(1 + \frac{\alpha^\tau}{\alpha}\right) \frac{\alpha^{1+2\tau}}{2} g''(\alpha) \end{aligned} \quad (21^{**})$$

mert $pa > a$ és

$$g''(a) < g''(pa)$$

a kitevőt úgy nagyobbítottuk, hogy a negatív szám helyébe kisebbet tettünk.

Tudjuk, hogy

$$ag''(a) = -g'(a) + \varepsilon_n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$$

Ezt (21**) -be helyettesítve

$$\begin{aligned} \frac{L_{a+\alpha^\tau}}{M(x)} &< e^{-\alpha^{2\tau}g'(a) + \frac{1+\alpha^\tau}{2}\alpha^{2\tau}[g'(a) + \varepsilon_n]} = \\ &= e^{-\alpha^{2\tau}g'(a) \left[1 - \frac{1+\alpha^\tau}{2}(1-\varepsilon_n)\right]}; \end{aligned} \quad (25)$$

mivel

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\alpha^\tau}{a}\right) (1 - \varepsilon_n) = \frac{1}{2}$$

és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha^{2\tau}g'(a) = \infty,$$

(25) kitevője $-\infty$ -né válik $\alpha = \infty$ -nel, tehát

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{L_{(a+\alpha^\tau)}}{M(x)} = 0,$$

sőt még

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \alpha^k \frac{L_{(a+\alpha^\tau)}}{M(x)} = 0.$$

Mivel a 3. csoportban a tagok száma $n_1 - (a + \alpha^\tau)$,

$$\frac{\sum_{n=a+\alpha^\tau}^{n_1} \frac{x^n}{e^{ng(n)}}}{M(x)} < [n_1 - (a + \alpha^\tau)] \frac{L_{(a+\alpha^\tau)}}{M(x)}.$$

Tekintve, hogy

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_1}{a} &= k \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sum_{n=a+\alpha^\tau}^{n_1} \frac{x^n}{e^{ng(n)}}}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{e^{ng(n)}}} &= 0. \end{aligned}$$

A sor tagjai az $a + a^\tau$ -tól az n_1 -ig nem befolyásolják a $G(x)$ növekedését.

23. A negyedik csoport tagjai. Azok tartoznak ide, melyeknél $n > n_1$. Vizsgálni fogjuk

$$\sum_{n_1+1}^{\infty} \frac{x^n}{e^{ng(n)}}$$

összeget, hol n'_1 az n_1 -t közvetlenül megelőző egész szám.

Mivel

$$\frac{x^{n_1}}{e^{g(n_1)}} = 1$$

és $g(n)$ növekvő függvény, minden az n_1 után következő tag egyénél kisebb. A legnagyobb ezek közül legyen $\frac{1}{q}$, ahol $q > 1$, akkor

$$\sum_{n=n_1+1}^{\infty} \frac{x^n}{e^{ng(n)}} < \sum_{n'_1+1}^{\infty} \left(\frac{1}{q}\right)^n = \frac{q}{q-1} \left(\frac{1}{q}\right)^{n'_1+1} < \frac{q}{q-1} \left(\frac{1}{q}\right)^{\psi(x)}$$

mivel $\phi(x)$ x -szel végtelenné válik

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{q}{q-1} \left(\frac{1}{q}\right)^{\psi(x)} = 0.$$

Tehát

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{n_1+1}^{\infty} \frac{x^n}{e^{ng(n)}} = 0.$$

Az egész függvény nagyságrendjét a maximális tag és a maximális tagok közvetlenül megelőző és követő a^τ számú tag határozza meg.

24. Bizonyításainkban mindig azt az esetet vettük, mikor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ng'(n)}{g(n)} = 0.$$

De az eredmény ugyanaz, ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ng'(n)}{g(n)} = c, \quad c \neq 0$$

mert ez esetben

$$ag''(\alpha) = (-c_2 + \varepsilon_n) g'(\alpha) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$$

tehát

$$\frac{L_{(\alpha - \alpha^\tau)}}{M(x)} < e^{-\frac{(1 - \frac{\alpha^\tau}{\alpha})}{2} \alpha^{2\tau} g'(\alpha) [c_2 - \varepsilon_n]}$$

és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [c_2 - \varepsilon_n] > 0,$$

úgyszintén

$$\begin{aligned} \frac{L_{(\alpha + \alpha^\tau)}}{M(x)} &< e^{-\alpha^{2\tau} g'(\alpha) + \frac{c_2}{2} \left(1 + \frac{\alpha^\tau}{\alpha}\right) [\alpha^{2\tau} g'(\alpha) + \varepsilon_n]} = \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0 \\ &= e^{-2\tau g'(\alpha) \left[1 - \frac{c_2}{2} \left(1 - \frac{\alpha^\tau}{\alpha}\right) + \varepsilon_n\right]}, \end{aligned}$$

mivel $c_2 < 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 - \frac{c_2}{2} \left(1 - \frac{\alpha^\tau}{\alpha}\right) + \varepsilon_n\right] > 0.$$

Látni való, hogy $\alpha)$ és $\beta)$ esetekben is igaz eredményünk.

Tillinger Istvánka.

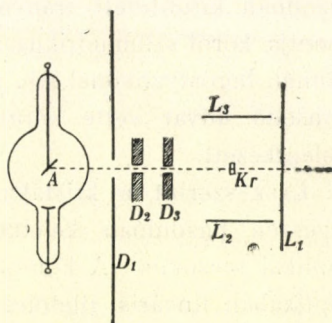
A RÖNTGENSUGARAK TERMESZETÉRŐL.

Csaknem általánosságban el van fogadva az a felfogás, hogy a Röntgensugarak a fénysugarakhoz hasonló elektromágneses hullámok. E mellett a felfogás mellett számos tapasztalat szól, így: a Röntgensugarak mágneses tér által való eltéríthetetlen-sége; azon körülmény, hogy a Röntgensugarak terjedési sebessége $3 \cdot 10^{10}$ cm sec⁻¹, tehát ugyanaz, mint a fény- és általában minden elektromágneses hullámé; s az elektromágneses felfogás mellett bizonyít a szoros analógia is, mely a fény, főleg ibolyán túli fény és a Röntgensugarak ionizáló képessége közt fönnáll. Más kísérletekből ismét a Röntgensugarak szerkezetére is következtetést vonhatunk. WALTER és POHL igen keskeny ékalakú réseken keresztül felvett elhajlási fotogrammjai alapján a Röntgensugarak hullámhosszának nagyságrendje 10^{-9} cm-nek tekinthető. BARKLA és BASSLER kísérleteiből kitűnt, hogy a Röntgensugarak többé-kevésbé polarizálhatók. Mind-ezen megfigyelések alapján úgyszólván biztossággal lehet a Röntgensugarak elektromágneses természete mellett dönteni. De viszont mind az említett jelenségek megmagyarázhatók akkor is, ha a Röntgensugarakat nem periodusos elektromágneses impulzusnak tekintjük s az említett megfigyelések az impulzus alakjára sem adnak közelebbi felvilágosítást. Kétségtelen bizonyítékot a Röntgensugarak periodusos jellege mellett csak interferenziajelenségek nyújthatnak, a mint a fénysugaraknál is az interferenziajelenségek tették elkerülhetetlenné a fény periodusos természetének feltételezését.

Röntgensugaraknál az optikaiakkal analóg interferenziajelenségek létesítése a valószínűen rendkívül csekély hullám-

hossz miatt, nagy nehézségekkel jár. A Röntgensugarak elhajlítására pl. azok hullámhosszát nem lényegesen meghaladó, tehát 10^{-9} cm-nél nem lényegesen nagyobb állandójú rácsra lenne szükség. Ilyen rács készítésére természetesen gondolni sem lehet. M. LAUE¹ megtalálta e nehézségek igen elmés és egyszerű megoldását. BRAVAIS elmélete (1850) szerint ugyanis kristályokban a molekulák szabályosan vannak elrendezve. A kristályban szabályosan elrendezett molekulák kölcsönös távolsága — a kristály sűrűsége, molekulasúlya és egy grammolekulában foglalt molekulák számából — minden kristályos anyagnál körülbelül 10^{-8} cm-nek adódik. Így a kristályokat mintegy 10^{-8} cm rácsállandójú térbeli rácsoknak tekinthetjük. LAUE gondolata az volt, hogy Röntgensugaraknak kristálylemezen, tehát egy körülbelül 10^{-8} cm állandójú térbeli rácson áthaladva, elhajlást kell szenvedniök. LAUE ezen feltevésének helyességét a felszólítására FRIEDRICH és KNIPPING² által végzett kísérletek teljesen igazolták.

A kísérleti berendezés, melyet FRIEDRICH és KNIPPING ezen vizsgálataiknál használtak, a következő volt: egy Röntgenső anti-katódjáról (1. ábra A) kiinduló sugárzásból alkalmas diafragmák (D_1, D_2, D_3) igen keskeny nyalábot (vonalkázott egyenes) határoltak



1. ábra.

el. E keskeny nyaláb tengelyei szerint pontosan orientált kristálylemezen (Kr) ment keresztül s ezután fotografikus lemezre (L_1) esett. A primér-sugarakat felfogó s azok irányára merőlegesen álló lemezen kívül még néhány lemez (L_2, L_3) volt elhelyezve a primér-sugarakkal párhuzamosan, úgy, hogy minden esetle-

¹ Sitzungsberichte der Akademie zu München, 1912. 303. l. Ann. d. Phys. (4.) 41. 971. l. 1913.

² Münch. Sitzungsber. 1912. 311. l. Ann. d. Phys. (4.) 41. 978. l. (1913.)

ges, a kristályból kiinduló elhajlitott sugár fotografálva legyen. Több órahosszat a Röntgensugarak által megvilágított L_1 lemez előhívásánál egy erősen túlexponált fekete folt körül szabályos elrendezésben fekete foltok egész csoportja jelent meg. A középső sötét foltot a Röntgensóból diafragmákon és kristálylemezen keresztül egyenes irányban haladó primér-sugarak létesítették, míg a körüle csoportosuló foltokat a kristálylemezről kiinduló s a primér-sugártól eltérített szekundér-sugarak. Legtöbb kristálylemez csak a primér-sugártól igen kevésbé eltérő irányokban szolgáltatott elhajlitott sugarakat; ezért csak a primér-sugarakat is felfogó fotografikus lemezen, azon is csak a középső folt közelében, lehetett interferenciafoltokat kapni, egyedül a gyémántnál lehetett nagyobb szögekkel elhajlitott sugarak nyomát a lemezeken előállítani. A kristály helyére amorf testeket téve, szintén jelentkeztek elhajlási ábrák,¹ ez esetben azonban kitüntetett irányok nélkül, a primér-sugarak átütési pontja körül szimmetrikusan elosztva. Kanadabalzsamnál, paraffinnál, borostyánkőnél stb. az átütési pontot lassanként elhomályosodó udvar vette körül, viasznál több koncentrikus kör jelentkezett.

LAUE szerint a kristályoknál az interferenciafotogrammok egészen hasonlóan keletkeznek, mint a fényelhajlási képek optikai rácsoknál. A különbség csak abban van, hogy míg az optikában lineáris, illetőleg síkbeli rácsokkal (keresztezett rácsok) dolgozunk, a Röntgensugarak interferenciaképei térbeli rácsokon keresztül létesültek. Az amorf anyagoknál fellépő diffrakcióképek analogonja a holdudvar, általában ködben a fényforrásokat körülvevő udvar s magyarázásuk is ezekéhez teljesen hasonlóan történik; az optikai jelenségeknél a levegőben lebegő nagyobb anyagi részeken, Röntgensugaraknál a szabálytalanul elrendezett molekulákon történik az elhajlás. A következőkben közelebről fogjuk megvizsgálni a *kristályokon* létesülő elhajlási jelenségeket.

¹ FRIEDRICH: Phys. Zeitschr. XIV. 317. 1. (1913.)

A legáltalánosabb esetben, ha az elhajlítást háromhajlású kristály létesíti — a_1 , a_2 és a_3 vektorokkal jelölve a kristály térrácsa egy elemi paralelepipedonjának különböző éleit x , y , z indexszel látva el az a_1 , a_2 , a_3 vektorok egy derékszögű koordinátarendszer megfelelő tengelyeire vonatkozó vetületeit — a kristálmolekulák középpontjainak koordinátái :

$$\begin{aligned} x &= ma_{1x} + na_{2x} + pa_{3x} \\ y &= ma_{1y} + na_{2y} + pa_{3y} \\ z &= ma_{1z} + na_{2z} + pa_{3z} \end{aligned} \quad (1)$$

lesznek, hol m , n , p pozitív vagy negatív egész számok. A Röntgenső antikatódjáról kiinduló hullámok az (1) alatti (x, y, z) pontokban levő molekulákat érve, azokat rendre szinuszos rezgések kibocsátására gerjesztik. Feltevés szerint minden molekula ugyanakkora hullámhosszúságú és ugyanoly intenzitású rezgést bocsát ki. A tér egy tetszőleges pontjában az összes rácspontokból odaérkező elektromágneses rezgések eredője fog érvényesülni. A részletes számításnak csak végeredményét közöljük. Az eredő számára nyert kifejezésnek az x , y , z tengelyekhez α_0 , β_0 , γ_0 iránykoszinusszal hajló beeső sugár esetén az elhajlított sugarak irányát jellemző α , β , γ iránykoszinuszok oly értékei mellett lesz maximuma, melyek eleget tesznek a következő összefüggéseknek :

$$\begin{aligned} a_{1x}\alpha + a_{1y}\beta + a_{1z}\gamma &= h_1\lambda + a_{1x}\alpha_0 + a_{1y}\beta_0 + a_{1z}\gamma_0 \\ a_{2x}\alpha + a_{2y}\beta + a_{2z}\gamma &= h_2\lambda + a_{2x}\alpha_0 + a_{2y}\beta_0 + a_{2z}\gamma_0 \\ a_{3x}\alpha + a_{3y}\beta + a_{3z}\gamma &= h_3\lambda + a_{3x}\alpha_0 + a_{3y}\beta_0 + a_{3z}\gamma_0, \end{aligned} \quad (2)$$

hol h_1 , h_2 és h_3 az illető maximum rendszámát jelölő egész számok. Az egyenletek baloldala egyenlő az elemi paralelepipedon egy-egy oldala, szorozva ez oldal és a kérdéses (α , β , γ iránykoszinuszú) szekundér-sugár által bezárt szög koszinuszával. Mindegyik egyenlet — α , β , γ -t változóknak tekintve — így körkúpokat szolgáltat, melyeknek közös tengelye az elemi paralelepipedon egyik élével esik össze. Maximum csak azon irányokban lesz, melyekben három körkúp metszi egymást,

helyesebben, amelyekben két kúp metszési egyenese a harmadik kúpsereg valamelyik felületéhez közel fekszik.

a_1 , a_2 és a_3 vektorok speciális választásával a maximumoknak megfelelő iránykoszinuszokat tetszőleges kristálytani rendszerhez tartozó kristályok esetére kiszámíthatjuk. Abban az esetben, midőn egy szabályos kristály egyik tengelyével párhuzamosan beeső sugárral lesz átvilágítva, ha koordinátatengelyekül a kristálytani tengelyeket választjuk (a z tengely a primér-sugár iránya), lesz:

$$a_{1y} = a_{1z} = a_{2x} = a_{2z} = a_{3x} = a_{3y} = 0, \quad a_{1x} = a_{2y} = a_{3z} = a,$$

azonkívül:

$$a_0 = \beta_0 = 0; \quad \gamma_0 = 1,$$

tehát a maximumok feltételi egyenletei lesznek:

$$a = h_1 \frac{\lambda}{a}; \quad \beta = h_2 \frac{\lambda}{a}; \quad 1 - \gamma = h_3 \frac{\lambda}{a}. \quad (3)$$

A primér-sugarak irányára merőleges képsíkon (L_1 lemez az 1. ábrán) az első két egyenletnek hiperbolák felelnek meg, melyek tengelyei egymásra merőlegesek s középpontjuk a primér-sugár átütési pontja. A harmadik egyenletnek ugyanoly középpontú koncentrikus körök felelnek meg. A képsík azon pontjaiban, a melyekben két hiperbola metszéspontja egy kör kerületén, vagy ahhoz legalább igen közel fekszik, intenzitás-maximum lesz; egy a képsíkba helyezett fotografikus lemezen (L_1) ott erősebb feketedés létesül.

A (2) alatti formulákból adódó α , β és γ értékeknek megfelelő irányokat szabályos rendszerhez tartozó kristályoknál egyszerű szerkesztés által is meghatározhatjuk.¹ A szerkesztés a következőképen történhetik: a kristály reciprok rácsában, azaz a kristály a állandójú térrácsához geometriailag hasonló $\frac{\pi}{a}$ állandójú térrácsban a kezdőponton keresztül kijelöljük a

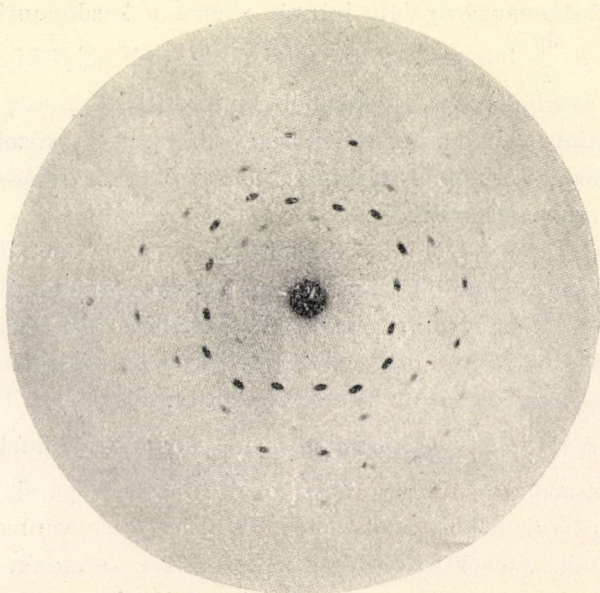
¹ L. P. P. EWALD: Phys. Zeitschr. XIV. 465. 1. (1913.)

beeső Röntgensugárnyaláb irányát s arra a kezdőpontból felmérjük a $h \frac{2\pi}{\lambda}$ hosszát. Az így nyert pont körül, mint középpont körül a kezdőponton át gömböt fektetünk. A reciprokrács kezdőpontját a gömb felületén, vagy ahhoz igen közel fekvő sarkpontjaival összekötő egyenesek jelölik ki a maximális intenzitásnak megfelelő irányokat.

Ezen szerkesztési eljárás alapján könnyen számot adhatunk az interferenciapontok hozzávetőleges elrendezésmódjáról. Mindjárt szembetűnik ugyanis, hogy ez az elrendezésmód lényegesen függ a primér-sugárnyaláb irányától, illetőleg a primér-sugárnyaláb és kristálylemez egymáshoz viszonyított orientáltságához. Tengelyirányban történő átvilágításnál a $h \frac{2\pi}{\lambda}$ sugarú gömbfelület a primér-sugarakra merőleges rácssíkokat a primér-sugarak átütési pontja körül rajzolt körökben metszi. Ha e rácssíkokban vannak olyan sarokpontok, melyek a kérdéses metszési kör kerületén fekszenek, úgy ezen pontok maximális intenzitású sugárirányokat jelölnek ki s ez egyetlen rácssíkban fekvő sarokpontok által szolgáltatott irányok a primér-sugárra merőleges képsíkon egy kör kerületén két egymásra merőleges tengely szerint szimmetrikusan, tehát négyes szimmetria szerint elrendezett interferenciapontokat adnak. Az interferenciapontok ily eloszlása mutatkozik a czinkszulfid kristályokon tengelyirányban való átvilágításnál nyert fotogramokon (2. és 3. ábra).

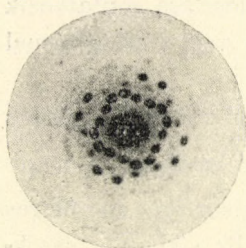
Szabályos kristálydiagonális átvilágításnál ¹ a reciprokrács $h \frac{2\pi}{\lambda}$ sugarú gömbfelületre eső sarokpontjai közül ismét összefoglaljuk azokat, a melyek egy a primér-sugárra merőleges síkban fekszenek. Az előbbi esetben egy ily síkban a sarokpontok mindig négyzetes hálózat csúcspontjaival estek egybe; jelen esetben az ily síkokban fekvő pontok elrendezése más lesz, sőt változni fog az illető sík helyzetével is. A 4. ábrán fel van tüntetve a primér nyaláb iránya és a reciprokrács egy

¹ P. P. EWALD: Phys. Zeitschr. XIV. 1038. l. (1913.)



2. ábra. Tengely irányban átvilágított czinkszulfid kristálylyal nyert interferencia pontok. A lemez a kristálytól 5 cm távolságban volt.

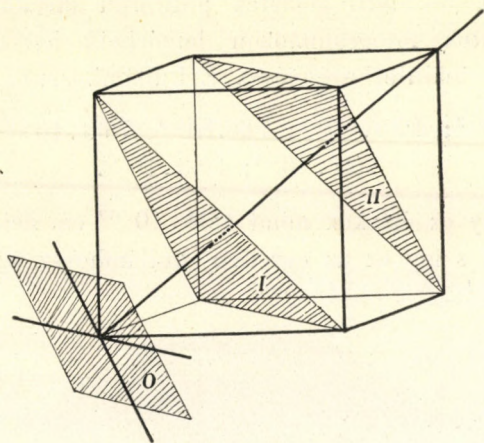
eleme; a primér sugárra merőleges és a rácspontokon áthaladó sík különböző lehetséges helyzetei sraffozva vannak előtüntetve (O, I. és II. helyzet). Az egyes esetekben a rácspontok az illető síkban a (4., 5. és 6.) ábrán előtüntetett sémák szerint vannak elrendezve. Az interferenciapontok itt is a primér-sugarak átütési pontjához koncentrikus körök mentén, de az egyes körkerületeken 3-as szimmetria szerint helyezkednek el. Az I. és II. helyzeteknek megfelelő esetben (4. ábra) egy kör területén 6, 0 helyzet esetén (6. ábra) 12 pont van.



3. ábra. Ugyanaz, mint a 2. ábra, de a lemez a kristálytól 1 cm távolságban volt.

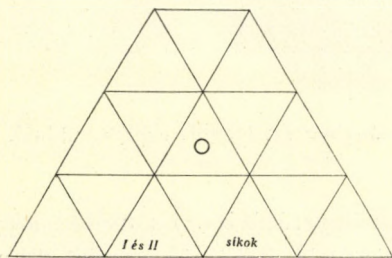
Ugyanezek a viszonyok ismerhetők fel a megfelelő fotogrammon is (7. ábra).

Hogy az interferenciapontok elhelyezése tényleg megfelel a

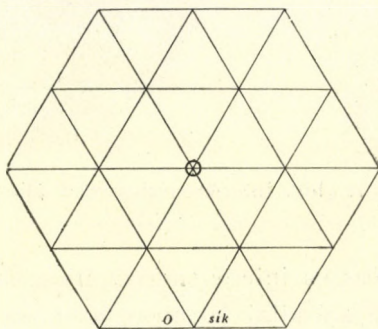


4. ábra.

(3) képletekben kijelölt maximumirányoknak, LAUE¹ quantitative, számítás alapján is igazolta a már többször említett ezinkszulfid kristályon keresztül tengely, illetőleg átló irányában felvett



5. ábra.



6. ábra.

fotogrammokon. A kristály rácállandójának a kristályanyag állandóiból (l. 2. old.) számított

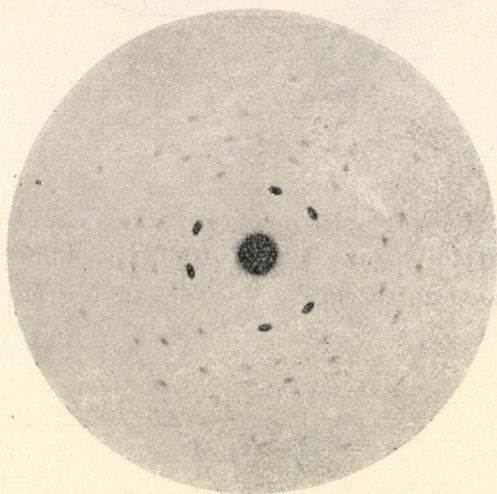
$$a = 8.50 \cdot 10^{-9} \text{ cm}$$

¹ Münch. Ber. 1912. 363. l. Ann. Phys. (4.) 41. 989. l. (1913.); (4.) 42. 397. l. (1913.)

értéket véve, (3) alatti képletek pontosan megadják az interferenciapontok fotogrammokon lemérhető helyzetét, hétféle hullámhossz tekintetbevételével. E hullámhosszak:

$$\lambda = 3.24 \cdot 10^{-9}; 4.85 \cdot 10^{-9}; 5.66 \cdot 10^{-9}; 7.68 \cdot 10^{-9}; 8.90 \cdot 10^{-9}; \\ 1.21 \cdot 10^{-8}; 1.53 \cdot 10^{-8}.$$

Feltűnő, hogy ez értékek mind $4.04 \cdot 10^{-10}$ cm-nek egészszámú többszörösei s így ez az egyetlen hullámhossz elég lenne az



7. ábra. Interferenciapontok átlós irányban átvilágított cinkszulfidnál.

összes interferenciapontok megmagyarázására. Ez utóbbi magyarázattal szemben azonban többféle nehézség merült fel s egyelőre valószínűbbnek látszik az a feltevés, hogy az interferáló sugarak a főt jelzett spektrális összetételűek.

Az a szabatosság, melylyel LAUE elmélete az interferenciafotogrammokon felfalálható pontok helyzetét megadja, úgyszólván kétségtelenné teszik az elmélet legalább alapgondolatának helyességét. A Röntgen-interferenciajelenségek többi magyarázói is úgyszólván mind a LAUE-féle alapfeltevésekből indulnak ki s inkább csak annak egymás irányban való kiegészítésére

törekszenek. Lényeges eltérés LAUE elméletétől csak STARK¹ magyarázásmódjában van. STARK a Röntgensugarakat korpusz-kuláris sugaraknak tekinti; a kristály térrács-szerkezete az elektromos részecskék áthaladását különböző irányokban különböző mértékben akadályozza s innen adódik a fotografikus lemez egyes pontjaiban való erősebb feketedés. Az interferencia-foltok ezen elmélet alapján várható elrendezése azonban nem egyezik a fotografikus felvételeken tényleg mutatkozó interferenciaképekkel s így az elmélet a kísérleti próbát nem állja. Látszólag ellentétben vannak LAUE felfogásával BRAGG, MANDELSTAM, ROHMANN s még többen, kik a Röntgen-interferencia-jelenséget a kristály hasadási felületein történő reflexió következményének tartják. De az eltérés tényleg csak látszólagos, mert ha az elmélet helyesen meg is adja az interferenciapontok helyzetét, ezáltal tulajdonképen csak a jelenség leírását nyertük, ámde magát a hasadási felületen történő reflexiót megint csak LAUE felfogása szerint, mint a kristálmolekulákból kiinduló szekundér-sugarak interferenciáját kell értelmeznünk.

A térrács-interferenciajelenségek elméletét LAUE alapfeltevéseiből kiindulva, de a molekulák hőmozgásának tekintetbevételével dolgozta ki DEBYE.² DEBYE elméletében a molekulák helyzete nem változatlan, hanem azok (1) alatt adott (x, y, z) koordinátákkal bíró pontok körül különböző kristályoknál és más-más hőmérsékleten különböző amplitudójú rezgőmozgást végeznek. Ezen egyensúlyi helyzetük körül szabálytalan rezgőmozgásokat végző molekulákból kiinduló elemi sugárzásokat összegezve, DEBYE a kristálylemezről kiinduló s különböző irányokban megfigyelhető intenzitások algebrai kifejezését nyerte. E kifejezés két részből áll, az egyik LAUE intenzitáskifejezésével azonos, ez az interferenciasugárzásnak felel meg, a másik

¹ Phys. Ztschr. XIII. 973. I. 1912. és XIV. 319. I. 1913.

² Verh. d. Phys. Ges. 15. 738. I. (1913.)

rész minden irányban egyenletesen eloszló szétszórt sugárzást állít elő. A hőmérséklettel, tehát a molekulák mozgásának hevességével megváltozik e két rész viszonya, a hőmérsékletváltozás irányának megfelelően az interferenciapontok jobban vagy kevésbé fognak a fotogramm alaptónusától eltérni, de az interferenciafoltok területe, illetőleg azok élessége nem fog a hőmérséklettel módosulni. DEBYE intenzitási képletéből azonkívül kitűnik, hogy: 1. az interferenciasugárzás intenzitása viszonyítva a szétszórt sugárzáséhoz, csökken a primér- és a kérdéses szekundér-sugár által bezárt ϑ szöggel; 2. a ϑ szög O -tól $\pi/2$ -ig való növekedése közben az interferenciasugárzás fogyása annál rohamosabb, mennél nagyobb a:

$$\frac{T}{f\lambda^2}$$

hányados, hol T a kristály abszolút hőmérsékletét, f a kristály molekuláira, azoknak egyensúlyi helyzetüktől való egységnyi eltolódásakor ható kvázielasztikus erőt, λ pedig a Röntgensugarak hullámhosszát jelenti. A molekulák hőmozgásának amplitúdója annál nagyobb, mennél magasabb a kristály hőmérséklete és mennél kisebb a molekulákat lekötő kvázielasztikus erő, úgy, hogy a hőmozgás együtt változik a $\frac{T}{f}$ hányadossal. Az interferenciasugárzás pedig e hányados és λ^2 viszonyától függ. DEBYE intenzitásképlete alapján tehát összefüggés állapítható meg a hőmozgás, a Röntgensugarak hullámhossza és az interferenciaképekben fellépő intenzitáseloszlás közt. Ismerve az intenzitáseloszlást, a hőmozgásból a Röntgensugarak hullámhosszát adhatjuk meg, illetőleg a hullámhossz más úton való meghatározása után a hőmozgás nagyságára következtethetünk. Az intenzitás f -től való függésének módját tekintve, könnyen megérthető, hogy épen az igen kevésbé összenyomható gyémántnál lehet erősen eltérített sugaraknál (nagy ϑ mellett) aránylag nagy intenzitást konstatálni.

A Röntgen-interferenciajelenségeknél fellépő hőmérsékleti

hatás — a DEBYE-effektus — elméletét SCHRÖDIGER¹ DEBYE-től némileg eltérően vezette le. SCHRÖDIGER számításai alapjául oly atommodell szolgál, melynél a szabályos rendszer szerint, hexaeder-térács csomópontjaiban elhelyezett molekulák nem mint DEBYE-nél változatlan egyensúlyi helyzetükhöz, hanem a szomszédos molekulákhoz vannak kvázielasztikus erők által kapcsolva. (Ily értelemben egymástól eltérő atommodellek szerepelnek egyrészt EINSTEIN, másrészt BORN és KÁRMÁN szilárd testek fajhevére vonatkozó vizsgálatainál.) Ily atommodellből kiindulva SCHRÖDIGER arra az eredményre jutott, hogy a DEBYE által levezetett intenzitáseloszlásbeli változáson kívül az interferenciafoltok élessége is módosul a hőmérséklettel, oly módon, hogy emelkedő hőmérséklettel a foltok területe mindinkább növekszik, azok lassanként az egész lemezt belepik s a különálló foltok helyét egyenletesen feketített mező foglalja el.

A hőmérsékletváltozással az intenzitás eloszlásában beálló változásokat LAUE és VAN DER LINGEN² kísérletileg is megvizsgálták. Felvételeket készítettek erősen hűtött és melegített kristálydarabokon keresztül s ezekből hozzávetőleg a DEBYE-féle elmélet helyessége tűnt ki. Az eddigi kísérletek eredményei azonban kevésbé biztosak, az elméletek quantitativ ellenőrzésére nem használhatók s a foltoknak SCHRÖDIGER által elméletileg megállapított elmosódásáról sem adnak felvilágosítást.

A mi a Röntgensugarak természetére vonatkozólag az interferenciakísérletekből vonható következtetéseket illeti, úgy biztosan állíthatjuk, hogy a kristályban szétszórt szekundér-sugarak periodikus természetűek. Az antikatódról kiinduló primérsugarak periodicitása mellett az interferenciakísérletek nem dönthetnek, mert nem periodikus elektromágneses impulzus is gerjesztheti a kristálmolekulákat periodikus szekundér-sugarak kibocsátására és ekkor az interferenciaképek szintén megmagyarázhatók. A szekundér-sugarak periodicitásán kívül a

¹ E. SCHRÖDIGER : Phys. Ztschr. XV. 79. l. (1914.)

² Phys. Zeitschr. XV. 75. l. (1914.)

Röntgeninterferencia-jelenségek a kristályok szabályos, térrács-szerű molekuláris elrendezését is bizonyítják, ugyanis e szabályos molekuláris elrendezés az interferenciaképek létrejöttének ép annyira szükséges feltétele, mint az interferáló szekundér-sugarak periodicitása. Így a Röntgen-interferenciajelenségek az anyagok molekuláris szerkezetének megvizsgálására is alkalmas eljárást szolgáltatnak. A molekuláris szerkezet Röntgen-sugarakkal való kikutatására egy esetben történt is már kísérlet: VAN DER LINGEN¹ ily módon megállapította, hogy a folyékony kristályok nem térrácsszerkezetűek, tehát nem tulajdonképeni kristályok.

Bartonic Emil.

¹ Verh. d. Phys. Ges. 45. 193. l. 1913.

PHYSIKAI SZEMLE.

Hidrogén-, nitrogén- és oxigén-csősugarak fénykeltése. (VEGARD Ann. d. Phys. 39. 111. l. 1912; 41. 625. l. 1913).

A dolgozat tárgya a mozgó és nyugvó intenzitás¹ változásának vizsgálata különböző sebességű sugarakra nézve és a megfigyelő tér különböző nyomásai mellett.

Méréseit VEGARD egy olyan csővel végezte, a melynél a kathódon csak egy szűk nyílás van és alkalmas berendezéssel a kisülési és a megfigyelő térben külön-külön lehet a nyomást változtatni; a megfigyelő térből egy Faraday hengerrel felszerelt oldalsó nyúlik ki. A Faraday henger a sugarak irányába hozható és így a sugarak töltését lehet vele mérni. A Faraday henger egyszersmind a sugarak energiájának méréseire is szolgálhatott, mert vékony rézlemezből készült és így melegező testnek alkalmas volt. A hőmérséklet emelkedést VEGARD termoelemmel határozta meg, a melynek egyik forrasztási helye az edény falával a másik pedig egy állandó hőmérsékletű fémpálczával érintkezett. Longitudinális irányban végezve megfigyeléseket, a kollimator kis elforgásával a sugarak fényintenzitását ugyanazon a helyen mérhette, ahol az energiájukat meghatározta.

A 3 gázzal végzett kísérletek a következőkben összefoglalt eredményekhez vezettek. A nyugvó intenzitás egyszerűen arányos a nyomással

¹ Ismeretes, hogy egy bizonyos gázban létrejövő csősugarak az illető gázra jellemző színeképet bocsátják ki. STARK észrevette, hogy longitudinális (azaz a sugarak haladási) irányában az előbb említett színeképen kívül, némely vonal mellett még egy az ibolya felé eltolódott vonal jelentkezik. Ezen vonalak keletkezését STARK úgy magyarázta, hogy a csősugárzásnál gyors mozgásban levő atomok emittálják a fényt és így ilyen irányban észlelve, a vonalak DOPPLER elvének megfelelően az ibolya felé eltolódnak. Ezt az effektust nevezzük a csősugarak DOPPLER effektusának. A gázra nézve jellemző fényhullámhosszoknak megfelelő intenzitást nevezzük nyugvó intenzitásnak, a DOPPLER effektusnak megfelelő intenzitást pedig mozgó intenzitásnak.

és a sebesség négyzetével, még pedig nemcsak egy vonalra, hanem az egész nyugvó spektrumra, mert mint kísérletei mutatják a nyugvó spektrum intenzitás eloszlása független a nyomástól és a feszültségtől. Ezt a törvényt úgy is fejezhetjük ki, hogy egy csősugár minden ütközésénél függetlenül a nyomástól oly fényenergia mennyiséget kelt a nyugvó gázban, amely arányos a tranzlatórius energiájával.

VEGARD megfigyelése. hogy pl. a hidrogén mozgó és nyugvó intenzitása egészen élesen el van egymástól választva, arra látszik mutatni, hogy a csősugarak atomjai is nagy sebesség mellett egymáson keresztül repülhetnek, mint ezt az α sugaraknál megállapították.

A nyugvó intenzitás keletkezését kétféleképpen magyarázhatjuk: vagy azt mondjuk, hogy a nyugvó intenzitás az ütköző részekről maguktól, vagy pedig, hogy az ütközésnél létrejövő szekundér-katódsugaraktól ered. A második feltevés nem valószínű 1. mert a csősugarak nyugvó spektruma nem egyezik meg a lassú kathódsugarak spektrumával, 2. mert mint VEGARD kísérletei mutatják, a keletkező fényintenzitás arányosan nő a sebesség négyzetével, amit, igaz csak aluminium esetére vizsgált meg, azonban szekundér katódsugarak keletkezésénél nem figyeltek meg 3. mivel ismeretes, hogy sok ütközésnél a mozgó atom nem szenved sebességváltozást és az ütközés mégis fénykeltéssel jár.

Mind a 3 gázra nézve áll, hogy a mozgó és nyugvó intenzitások viszonyzáma növekvő feszültség és a megfigyelőtér növekvő nyomása mellett csökken, hidrogénnél és oxigénnél körülbelül ugyanazon mértékben, hidrogénnél erősebben. Ez az eltérés csak a mozgó intenzitás változásából származhatik, mert a nyugvó intenzitás változása, amint láttuk, mind a 3 gáznál ugyanazon törvényszerűségnek hódol. Ennek a jelenségnek a magyarázatát VEGARD abban találja, hogy nitrogén és oxigén önsugárzása, azaz az út egységre eső fényintenzitása a sebességgel nő, hidrogéné viszont csökken. A különbség onnan származhatik, hogy a nitrogén és oxigén esetén megfigyelt leggyorsabb sugarak még mindig lassúbbak mint a megfigyelt hidrogén-csősugarak.

Ebből a megfigyelésből VEGARD egy érdekes következtetést von le: ismeretes ugyanis, hogy oxigén és nitrogén esetében az eltérítési és az optikai módszerrel (DOPPLER effektus) meghatározott maximális sebességek megegyeznek, hidrogénnél pedig az optikai úton kapott érték mindig kisebb. Ezt az eltérést VEGARD úgy magyarázza, hogy az igen gyors hidrogéncsősugarak kicsiny önvilágítások folytán az optikai módszernél nem észlelhetők.

Küssler Elly.

A csősugarak szekundér-sugárzása. (H. BAERWALD. *Ann. d. Phys.* 41 643. 1913).

BAERWALD egy régebbi értekezésében megmutatta, hogy LENARD eljárását, mellyel a fotoelektromos úton kiváltott elektronok sebességét határozta meg, a csősugarak által keltett szekundér-sugarak esetében is alkalmazni lehet.

Ha ugyanis a csősugarak útjába egy elektródot helyezünk úgy ez töltést nyer, mely töltést a primér-sugarak, a reflektált sugarak és a szekundér-sugarak együttesen hozzák létre. A szekundér-sugárzást, mint tudjuk, már kis feszültséggel le lehet fékezni és így el lehet választani a szekundér-sugarak hatását a primér és a visszavert sugarak hatásától. BAERWALD berendezése tehát a következő volt: a csősugarak egy fémhálón keresztül jutnak az elektródra, mely galvanométeren keresztülföldelve van. A galvanométer kitéréseit megfigyelte egyrészt akkor, mikor a dróthálón nincs feszültség, másrészt pedig akkor, mikor a dróthálóra kis ellenfeszültség van kapcsolva; a két kitérés különbségéből lehet a szekundér-sugárzásra következtetni. Ennek az eljárásnak két hátránya van: először is a primér-sugarak erős töltése mellett nem határozható meg elég pontosan a szekundér-sugárzás csekély töltése, másodsor pedig maga a fémháló is bocsát ki szekundér-sugarakat, amely sugárzás intenzitása — mint utóbb kitűnt — olyan nagyságrendű mint a vizsgált elektród szekundér-sugárzása.

Ezeket a hibaforrásokat újabb kísérleteinél BAERWALD úgy küszöböli ki, hogy a szekundér-sugarak keletkezésének és megfigyelésének helyét egymástól elválasztja és a primér-sugarak töltését megsemmisíti az által, hogy az elektródot egy batteriával köti össze. A sugarak a radiátort körülbelül 60° szög alatt érik, a radiátorral szemben pedig egy FARADAY-henger van alkalmazva, melynek töltését mérjük. Így természetesen a visszavert és szekundér-sugarak együttes hatását határozzuk meg. A reflektált sugarak hatását csökkenti az által, hogy a Faraday-hengert nem állítja visszaverődési (optikai visszaverődésnek megfelelő) irányba. A két sugárzást pedig az előbb említett ellenfeszültséggel választja szét; az ellenfeszültség itt magán a radiátoron van.

Aluminium radiátort és hidrogéncsősugarakat használva, arra az eredményre jut, hogy a primér-sugarak egy meghatározott feszültségéhez a szekundér-sugaraknak egy megfelelő maximális sebessége tartozik. Ez a maximális sebesség nő a primér-sugarak sebességével egy bizonyos fokig, a melyen túl a szekundér-sugarak sebessége nem fokozható. A szekun-

dersugarak keletkezéséhez legalább 900 Volt kisülési potenciál szükséges, ennek megfelelően van ezen sugaraknak egy minimális sebessége 5 Volt.¹ A szekundér-sugárzás 95 %-a még a legnagyobb kisülési feszültség mellett is lassúbb 10 Voltnál. A szekundér-sugárzás intenzitása arányos a primér-sugarak intenzitásával, a sugarak sebessége viszont független ettől.

Különböző anyagok nagyjában mind megegyező eredményeket adnak. Hidrogén- és levegőcsősugarakat vizsgálva BAERWALD arra az eredményre jut, hogy az ugyanazon kisülési potenciálnál jelentkező különbségek nem a gázok kémiai különbségéből, hanem abból a tényből következnek, hogy a nekik megfelelő primér-sugarak atomsúlyaiknak megfelelően különböző sebességűek. A primér-sugarak minőségének befolyása a szekundér-sugárzás mennyiségére pedig azon részecskéknak a térfogategységeire eső számától függ, amelyek a sugarat alkotják.

Végül megállapítja BAERWALD, hogy eredményei teljesen megfelelnek azon törvényszerűségeknek, a melyeket LENARD a kathodsugarak szekundér-sugárzására nézve megállapított, valamint CAMPBELL-nek a δ -sugarakra vonatkozó tapasztalataival és a Röntgensugaraknál felismert törvényszerűségekkel is megegyeznek, míg THOMSON idevonatkozó kísérleteivel ellentétben állanak; BAERWALD ugyanis nem talált oly nagy kezdősebességű (40 Voltig terjedő) szekundérsugárzást, mint THOMSON. Mindezekben BAERWALD annak a felfogásnak igazolását látja, hogy a csősugarak az általuk keltett szekundér-sugárzás energiáját nem váltják ki, hanem maguk szolgáltatják.

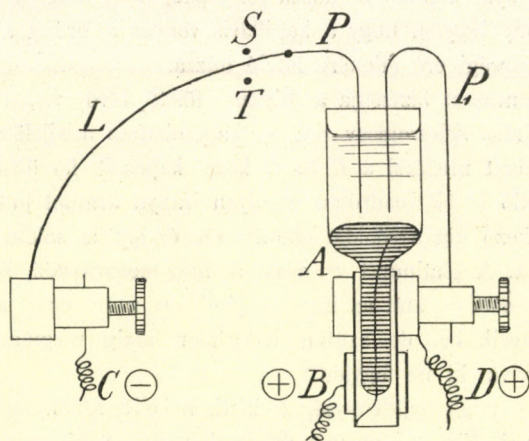
Küssler Ely.

¹ Oly sebesség, mely 5 Volt feszültségkülönbséggel megszüntethető.

PHYSIKAI LABORATORIUM.

Egyszerű higanymegszakító elektromágnessel hajtott inga számára.

Elektromágnessel mozgatott ingánál egyenáram esetében az áramnak csak egyik mozgási iránynál szabad működni. Lehet ugyan az ingát a Neef-féle kalapács módjára is mozgásban tartani, amikor az önindukció játszik lényeges szerepet, melyet amalgamozott platinadrótnál a kapillari-



8. ábra.

tás is lényegesen támogat, de a hatások kedvezőtlen, mert az áram nagy része kárba vész, azonkívül az aránylag erős áram a lengési időt is lényegesen befolyásolhatja.

Ezeket segíteni van hivatva 8. ábrában vázolt kontaktus szerkezet. Lényeges részei a már régebben ¹ közölt A-jelű higanyos edényen

¹ Tartós higanycontact. Math. és Term. Értesítő II. 74. (1885.) és X. 213. (1892.)

kívül az igen vékony és rugalmas L lemez vagy drót, mely alsó végén szilárdan van befogva, míg felső szabad végéhez a higanyt időközönként érintő platinadrót P van forrasztva.

Ezen részek külön lapra vannak erősítve, mely akként van az inga állványára vagy szekrényére erősítve, hogy függőleges irányban kellően beállítható legyen.

Magára az ingára van erősítve két vízszintes peczek S és T , melynek, hogy az ábrában felvett esetnek megfelelően közelítőleg függőlegesen mozogjanak, az inga forgási tengelyével közel egyenlő magasságban kell lenniök.

Az előbbi szerkezet B és C -nél összekötendő az áramforrást és az elektromágnest tartalmazó vezetékkel, úgy, hogy a platindrót bemerülésekor zárja az áramkört és a kiemelkedésnél ismét megszakítsa. Az áram irányát a \oplus és \ominus jelek mutatják.

A helyes működéshez szükséges, hogy P drót amalgámos legyen, tehát a higanyal érintkezve hozzá jól tapadjon és hogy L rúgó annyira hajlékony legyen, hogy a kapilláris vonzás a drótot a fölfelé irányuló rugalmassági erő ellenére lefelé húzza.

Az amalgamozást biztosítja a higany fölött lévő víz, — melyben néhány ezredrész salétromsav van — kapcsolatban a kijelölt áramiránnyal; tartósságát megőrzi a B és D közé kapcsolt feszültség, mely a vízben végződő P platinadróton át olyan irányú áramot juttat a vízbe, hogy a keletkező higanysóldat elbontassék és így a salétromsavkészlet regenerálódjék. A platindrót P csak a meg-megszakadó áram hatása alatt amalgamozódik, ami az inga megindítása után csak bizonyos idő múlva következik be, de azután határtalan ideig megmarad, csak a salétromsavas víz ki ne fogyjon.¹

A mi az L rúgó hajlékonyságát illeti, a kellő vékonyságot maratással lehet elérni. Finom órarugót aczélból igen híg kénsavval maratunk, a mit eleinte melegítéssel gyorsíthatunk. A kellő hajlékonyságot elérve a felületet simára köszörüljük és megolajozzuk vagy másképp védjük, hogy a rozsdásodást megakadályozzuk.

A szerkezetet úgy állítjuk be, hogy P drót az inga egyensúlyi helyzetében a higany felszínétől 1—2 mm távolságban legyen, és hogy L az S peczekre biztosan támaszkodjék. Ha S az inga lengése közben

¹ Erre szolgáló Mariotte-féle palaczk közölve van az idézett második közleményben.

2—3 mm-rel lejjebb szorítja P drótot, akkor eléri a higany felszínét és ha már jól amalgamozódott, a hajcsővesség következtében annyira behatol a higanyba, hogy L elhagyva S ütközőt, a szintén az ingával mozgó T -re támaszkodik.

Tegyük fel, hogy S és T az inga jobb oldalán van, az inga tehát jobbról balra lengett. Ezalatt az elektromágnesben mindaddig nem körözött áram, míg a P a higanyt el nem érte, ami jelentékeny kitérésnél következnek be, melyben az elektromágnes csak kis erővel hasson az ingára erősített vasfegyverzetre,¹ főhatását ugyanis az egyensúlyi helyzet közelében fejtsse ki. Az érintkezés P és a higany közt megmarad, mialatt az inga balról jobbra leng, akkor is, mikor S már nem szorítja le L -et, mert a kapillaritás hatása fölülmúlja a rugalmas erőt, és ez így marad mindaddig, míg T peczek a higanyból ki nem emeli L -et, ami az egyensúlyi helyzet közelében, de már azon túl következnek be.

Ekkor az áram megszakad és az elektromágnes csak remanens mágnességével hat az ingára.

A kellő beállítást S és T peczek távolságának kellő megválasztásával és a kontaktus szerkezet emelésével vagy süllyesztésével eszközöljük.

Schuller Alajos.

¹ Az idézett helyeken ismertetve.

IRODALOM.

Die Theorie der Strahlung und der Quanten. (Verhandlungen auf einer von E. SOLVAY einberufenen Zusammenkunft; vom 30. Oktober bis 3. November 1911; Abhandlungen der deutschen Bunsen-Gesellschaft Nr. 7. Halle 1914; XII + 405. l. Ára 15.60 márka.)

Ismeretes, hogy a hősugárzás elméletében — hogy az eredmények megegyezésben legyenek a kísérleti tapasztalatokkal — PLANCK azt a merész föltevést vezette be, hogy a sugárzás forrásai gyanánt szereplő elektromos oszcillátorok az energiát csak bizonyos meghatározott adagokban vehetik fel és bocsáthatják ki; e szerint az energia is — csak úgy mint az anyag — nem volna felosztható tetszés szerinti apró részletekre, hanem «atomos» szerkezetű lenne. Az energia ezen tovább nem osztható atomjait nevezte PLANCK energiaquantumoknak, röviden quantumoknak. Magyarul talán energia-adag volna a megfelelő elnevezés. Az energia-adagok legcsudálatosabb tulajdonsága, hogy a különféle oszcillátorok felvette és kibocsátotta adagok nem egyformák, hanem az energia-adag mindig az oszcillátor rezgésszámával arányos, tehát

$$\varepsilon = h\nu$$

a hol ε jelenti a ν rezgésszámú oszcillátornak energia-adagját, h pedig egy univerzális állandó, melynek számértéke is meghatározható a fekete test sugárzásában fellépő energiaeoszlás kísérleti megvizsgálása alapján. A ma elfogadott számérték:

$$h = 6.55 \cdot 10^{-27} \text{ erg. sec.}$$

Eleinte PLANCK hipotézisének kevesebb jelentőséget tulajdonítottak, mert olyan föltevésnek tekintették, melyet egy adott jelenségnek megmagyarázására külön «ad hoc» gondoltak ki. Részletesebb elméleti kutatások azután reámutattak a PLANCK-féle föltevés tulajdonképeni fizikai jelentésére: PLANCK előtt az igen sok tagból álló «rendezetlen» szisztémák (molekula vagy oszcillátorhalmazok) mechanikáját az egyenletes energiaeoszlásnak MAXWELL-BOLTZMANN-féle elve alapján építették fel. Ez

az elv a következő: rendezetlen szisztémában minden szabadsági foknak átlagban ugyanannyi energia jut, tehát pl. a sugárzó forrás különféle rezgésszámú oszcillátorainak átlagos energiája ugyanaz. Ha ezt az elvet az elektromágneses tér MAXWELL-féle alapegyenleteivel együtt alkalmazzuk oszcillátorainkra, akkor a WIEN-RAYLEIGH-féle képletet kapjuk a fekete test sugárzásának energiaeeloszlására nézve, mely a tapasztalatokkal ellenkezik. Minthogy pedig bizalmunk a MAXWELL-féle téregyenletekben eléggé szilárd alapokon nyugszik, az *egyenletes energiaeeloszlás elvét* kell elvetnünk és oly föltevessel pótolnunk, mely a tapasztalattal megegyező eredményre vezet. Ilyen föltevés PLANCK-nak quantumhipotézise, melynek azóta ő és mások többféle alakot adtak, lényege azonban mindig az, hogy *kizárja az egyenletes energiaeeloszlást* és az egy-egy szabadsági fokra eső átlagos energiát a rendszer rezgésszámával arányosnak tekinti.

A sugárzási jelenségek körében az egyenletes energiaeeloszlás elve valóban megdöntöttnek tekintendő, a mi azonban nincs ellenmondásban a klasszikus mechanika alapelveivel, mert az egyenletes energiaeeloszlás nem szigorú következménye a mechanikai elveknek és csak bizonyos segédfeltevések és kevésbé meggyőző valószínűségi megfontolások alapján vezethető le belőle. Igaz viszont, hogy még kevésbé lehet szó arról, hogy a quantumhipotézist a klasszikus mechanikából levezzsük.

Ezek szerint tulajdonképen az egyenletes energiaeeloszlás elve és a quantumhipotézis állottak szemben egymással, mint egymást kizáró fizikai alapelvek. Ez utóbbinak a sugárzási jelenségek körében aratott diadala után megkísérlették az új elvet egyéb oly jelenségekre is alkalmazni, amelyek elméletében addig az egyenletes energiaeeloszlás elve nem vezetett kielégítő eredményre. Itt elsősorban a fajhók elmélete jön szóba, melyben az egyenletes energiaeeloszlás törvénye a DULONG-PETIT-féle törvényre vezet, mely szerint valamennyi szilárd elemi testek atomfajhője ugyanaz és *független a hőmérséklettől*.

Ez utóbbi következtetés éles ellenmondásban van azoknak az újabb kísérleteknek az eredményével, a melyeket különösen NERNST és tanítványai végeztek és a melyek szerint igen alacsony hőmérsékleten (cseppfolyós levegő, hidrogén, hélium hőfokán) valamennyi test fajheve rohamosan csökken, sőt úgy látszik, zérus felé konvergál, a mint a test hőmérséklete az abszolút 0 hőfokhoz (-273° C.) közeledik. EINSTEIN mutatta meg legelőször, hogy ha a fajhó elméletében az egyenletes energiaeeloszlás elvét a quantumhipotézissel pótoljuk, az elméletből a faj-

hőknek zérus felé konvergálása következik, sőt az elméleti úton egészen hozzátételező számítások alapján a fajhő és hőmérséklet összefüggésére nézve nyert képlet elég jól egyezik a tapasztalatok eredményeivel. Ez az eredmény már a quantumhipotézis ellenfeleit is gondolkodóba ejthette, mert igen valószínűvé tette, hogy a quantumhipotézisben vannak oly elemek, melyek közelebb járnak a valósághoz, mint az egyenletes energiaszétosztás elve.

Mikor már ily módon a fizikusok érdeklődése a quantumhipotézis felé, mint a fizikának általános alapföltevése felé fordult, hívta össze ERNEST SOLVAY brüsszeli filozófus és a fizikai tudományok bőkezű mecénása a «Quantum-kongresszus»-t, melyen a 20 meghívott fizikus vett részt és a melyen a quantumhipotézisnek a fizika különféle ágaiban való alkalmazását vitatták meg, 12 előadás keretében. A kongresszus 1911 október 30-ától november 3-áig tartott és a vita alapjául szolgáló előadások a következők voltak:

H. A. LORENTZ (Leyden): Az egyenletes energiaszétosztás tételének alkalmazása a sugárzásra.

J. H. JEANS (Cambridge): A fajhők kinetikus elmélete Maxwell és Boltzmann szerint.

E. WARBURG (Berlin): A Planck-féle úrsugárzásra vonatkozó képlet kísérleti megvizsgálása:

H. RUBENS (Berlin): A Planck-féle képlet megvizsgálása a hosszú hullámok birodalmában.

M. PLANCK (Berlin): A hősugárzás törvényei és az elemi hatóadagok hipotézise.

M. KNUDSEN (Kopenhága): A gázok kinetikus elmélete és megfigyelhető sajátságai.

J. PERRIN (Páris): A molekulák való létének bizonyítékai.

W. NERNST (Berlin): A quantumhipotézis alkalmazása a fizikai-chemiai kérdések egész sorára.

KAMERLINGH ONNES (LEYDEN): az elektromos ellenállásról.

A SOMMERFELD (München): A hatóadag jelentősége a fizika nem periodikus molekuláris jelenségei körében.

P. LANGEVIN (Páris): A mágnesség és a magnetonok kinetikus elmélete.

A. EINSTEIN (Prága): A fajhők elméletének mai állása.

Az előadások mindegyikéhez élénk vita fűződött.

Úgy az előadások, mint az összes hozzászólások teljességükben megjelentek francia nyelven «La Théorie du rayonnement et les quanta»

címen még 1912-ben (Paris, Gauthier-Villars). Most az egész anyag német nyelven látott napvilágot. A. EUCKEN, ki a német kiadást sajtó alá rendezte, még egy függelék is írt a könyvhöz, melyben a quantum-hipotézisnek fejlődését vázolja 1911-től 1913-ig, és főképen DEBYE, BORN és KÁRMÁN vizsgálatait ismerteti, kik a fajhók elméletének EINSTEIN-féle vázlatos alakját lényegesen tökéletesítették és elmélet meg kísérlet között figyelemreméltó megegyezést találtak.

A czimben említett mű bizonyára egyik klasszikusa lesz a quantum-hipotézis irodalmának, melyre előreláthatólag még nagy szerep vár a jövő tudományában. A műnek nemcsak az ad különös értéket, hogy a leghivatottabbakat szólaltatja meg, hanem különösen az, hogy az olvasó elé tárja e tudósoknak úgyszólván fesztelen eszmecseréjét, melyben gyakran még kiforratlan gondolataikat és még csírázó eszméiket is elárulják és így bepillantást engednek a készülő tudomány műhelyébe.

Zemplén Győző.

Tables annuelles des constantes et données numériques de chimie, de physique et de technologie. Ez a nagyszabású, az Akadémiák Nemzetközi Szövetségének pártfogásával évenként megjelenő gyűjtemény magában foglalja az illető évben bármely nyelven és bármely tudományos folyóiratban közölt összes fizikai, chemiai és technológiai állandók és számadatok jegyzékét. Az adatokat négy nyelvű szöveg kíséri: francia, német, angol és olasz. Az első kötet, az 1910, a második kötet az 1911. évben közzétett állandókkal már régebben megjelent. Most a nemzetközi szerkesztő-bizottság főtítokára C. MARIE aláírási felhívást tesz közzé a III. kötetre (1912. évi állandók), melynek megjelenését még folyó évi márczius elejére helyezi kilátásba. Aláírók számára a vaskos negyedrét kötet ára fűzött példányért 30, kötött példányért 34 frank. A ki 1000 korona évi díjat fizet, életfogytiglan kapja a kötött példányokat; ipari vállalatok ugyanezen összegért 25 évfolyamra tarthatnak igényt. Az aláírók a kötetet *utánvétellel* fogják megkapni. Aláírásokat elfogad dr. BUCHBÖCK GUSZTÁV egyetemi tanár (VIII. Múzeum-körút 4, III. sz. chemiai intézet) és a Lapok fizikai részének szerkesztője, kik a nemzetközi kiadó bizottságnak tagjai.

A kötetek megjelenése után árúk tetemesen emelkedik. Az első és második kötet néhány példánya még kapható. Az első kötet ára fűzve f. év július 1-éig 27 frank (fűzve) és 30 frank (kötve); azután ugyanannyiba fog kerülni, mint a második kötet (32, illetve 36 frankba).

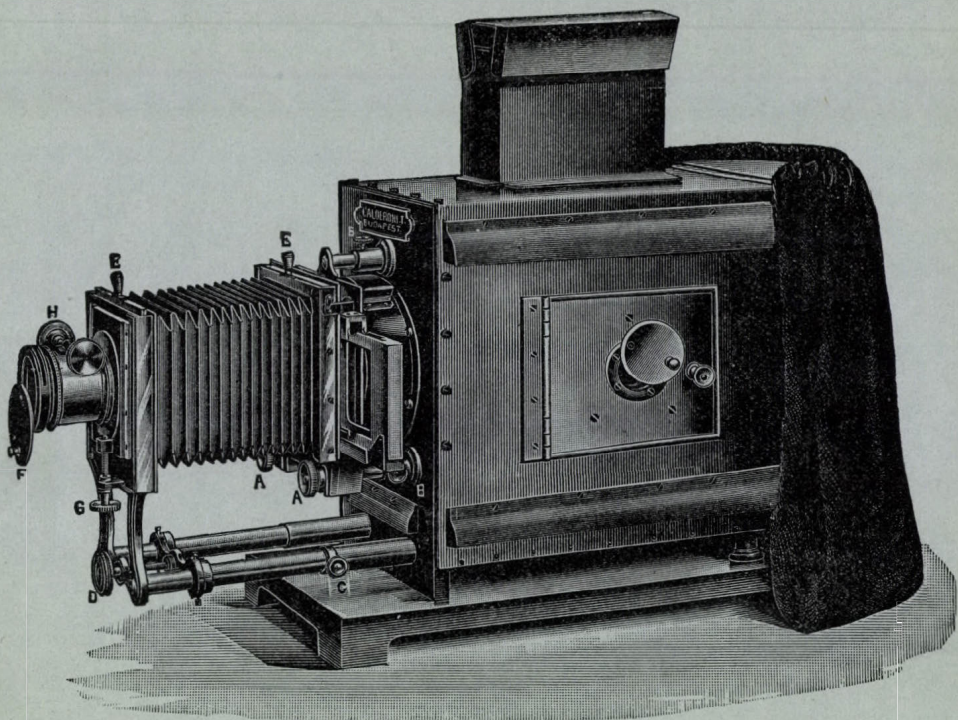
Javítandó.

E Lapok jelen évfolyama 111. lapján a 7. ábrában az O -nál lévő szög φ -vel jelölendő.

Calderoni mű- és tanszervállalat r.-t.

Budapest, IV., Váci-utca 50.

Ajánlja saját szerkesztésü szabadalmazott vetítőkészülékeit.



Vetítőkészülék «Calderoni I»

Ezen készülék lámpa-szekrénye legjobb minőségű aczéллеmezekből van készítve, eternit-béléssel és kitűnő szellőztető szerkezettel van ellátva, 120 mm. átm. kettős megvilágító-lencsével (Kondensor), hajtócsavarral ellátott objektív-foglalattal, egy ebbe illő kitűnő vetítési objektívvel, a finom beállítás részére szolgáló mikrométer-csavarral és tolószerkezettel ellátott kettős kép-váltó kerettel van felszerelve. A kondensor-lencsék a lámpatartó szekrényen kívül vannak elhelyezve és a lencsék közt felmelegedő levegő a kondensortartó cső felső részén levő és egy kis fedővel borított nyíláson át távozhatik. A kondensor mögött egy kali-üvegből készített védőlemez van elhelyezve. — A készülék, mely egy áttört vastalapzatra van felszerelve, teljesen fémből van készítve. — A bronzból készített objektív-tartó előrész egy mikrométer-csavar segítségével magasabbra és mélyebbre állítható. Az oldalajtóval és bárszonymból készült fényelzáró-függőnnyel ellátott készülék ára fenti felszereléssel lámpa nélkül

K 260.—

Vetítőkészülék «Calderoni I. H.»

Ezen készülék, mely ugyanolyan szerkezetű mint a túloldali, egy általunk szerkesztett hűtővel van még ellátva, mely a megvilágító lencsék közé van igatva. — Ezen felszerelés vetítőkészülékünket a legtökéletesebb ilyenmű készülékké avatja. Ára *lámpa nélkül* K 350.—

A vetítőkészülékeinkhez felszerelt hajtócsavarral ellátott objektív foglalatba tetszés szerinti 6 különféle gyújtávolságu vetítési objectivet lehet elhelyezni, melynek gyújtávolsága 150, 200, 250, 310, 355, 405, mm. — Minden készülékhez a fentjelzett árban csak egy darab ilyen vetítési objektív tartozik. — Minden további objektív ára darabonként K 24.—

Vetítőkészülékeink a mérőleges és vízszintes síkban végbemenő vetítésre, valamint mikroszkopikus vetítésre is, úgy szintén szinképek, interferenciális tűnemények, fényelhajlási, fénycsapítási és kettős törési kísérletek stb. vetítésére is alkalmasak. Ezen mellékeszközökről addig is, míg az ezekről szóló külön árjegyzékünk meg fog jelenni, kívánatra szívesen küldünk részletes költségvetéseket. Vetítőkészülékeinket — melyek a legtökéletesebbek — tetszés szerinti fényforrással, u. m. villamos ívfénnyel, mézsfénnyel, acetylénnel, borszesz-izzófényvel stb. szállítjuk.

Elektromos ívlámpa

legjobb minőségű és felette erős szerkezetű (mellékelt ábra szerint) mely hajtócsavarok segítségével minden irányban könnyen mozgatható, 110—220 volt feszültségű egyen- vagy váltóáramhoz, 5—50 Ampère áramerősségig használható. Ára K 120.—

Elektromos ívlámpa

egyszerűbb és könnyebb szerkezetű. Ára K 90.—

Borszesz-izzófénylámpa légsűrítővel ellátva, mely 300 gyertya-fény erejű világítást szolgáltat. Ára teljesen felszerelve K 50.—

Háromlábú asztalállvány, mely hajtócsavar-szerkezet segítségével magasabbra és mélyebbre állítható, felső lapja pedig a vetítőkészülék által esetleg megkívánt szög alá, illetve ferde állásba hozható. Ára K 110.—

Vetítési ernyő finom vászonból 200 cm. négyzetben, gyűrűkkel ellátva. Ára K 8.—

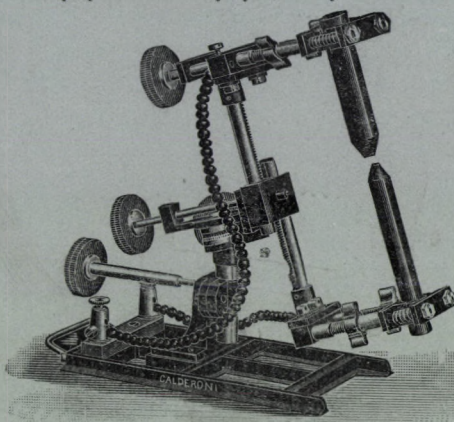
Ernyő-állvány fenti ernyő részére, mely könnyen és gyorsan szétszedhető. Ára szekrényben K 30.—

Vetítési ernyők zsinórral felhúzható szerkezettel. — Ezen ernyők legezészerűbben a falra erősítendő 2 vastámaszra szerelendők, azonban bárhová, esetleg közvetlenül a falra is felerősíthetők. — Az ernyők árai a következők:

	200	240	300	360	420	480 cm. négyzetben
Ára	45.—	65.—	90.—	145.—	200.—	240.— korona.

Calderoni mű- és tanszervállalat részvénytársaság, Budapest, IV, Váci-utca 50.

Részletes nagy árjegyzék vetítőkészülékeinkről munkában van.



50255

MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI LAPOK

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT MEGBIZÁSÁBÓL

SZERKESZTIK

FEJÉR LIPÓT és ZEMPLÉN GYŐZŐ

HUSZONHARMADIK ÉVFOLYAM

IV. FÜZET

1914

ÁPRILIS.

BUDAPEST

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT

1914.



TARTALOM.

Lap

TILLINGER ISTVÁNKA: A transcendens egész függvények növekedésének vizsgálata kapcsolatban az analitikai függvények szingularitásainak vizsgálatával (Harmadik és befejező Közlemény)---	169
GOLDZSIHER KÁROLY: A járadákszámítás kamatlábproblémája ---	184
HEVESY GYÖRGY: Az atómok szerkezetéről (Első közlemény) ---	192
<i>Physikai Szemle</i> : G. WIETZEL, Fémek termoelektromos viselkedése mély hőmérsékleteken (BARTONIEK) 208 l. — A Röntgensugarak reflexiójáról és spektrumáról (BARTONIEK) 209. l. — SCHIMDT K. E. F. Az elektromágneses hullámok hatásköréről (POGÁNY) 213. l. — A. EINSTEIN, A fotokémiai aequivalens egy törvényének termodinamikai levezetése (TOMITS) 215. l. — V. HENRI, Módszer az abszorpczió mennyiségi mérésére az ibolyántúli spektrumban (TOMITS) 217. l.	
<i>Physikai laboratorium</i> : H. DESLANDRES és A. PEROT. Kísérletek erős mágneses terek létesítésére (BARTONIEK) 219. l.	
<i>Előadási kísérletek</i> : SCHULLER A. Az esőgépkísérletekről ---	221
<i>Előadásainkról</i> ---	227

Értesítjük olvasóinkat, hogy folyó évi január elsejétől fogva e Lapok szerkesztését az alulirottak vették át. E munkánkban az eddigi szellemhez óhajtván ragaszkodni, hangsúlyozzuk t. munkatársaink előtt, hogy igen szívesen közlünk oly rövid és alapos dolgozatokat, a melyek a tudománynak különösen újabb eredményeit könnyen érthető modorban ismertetik.

Fejér Lipót és Zemplén Győző.

A folyóirat szellemi részét illető közlemények (cikkek, feladatok, stb.) a szerkesztőkhöz küldendők, és pedig a matematikai tárgyak *Fejér Lipót (V., Falk Miksa-uteza 15.)*, a fizikai tárgyak pedig *Zemplén Győző (I., Fehervári-út 54/a)* címére. T. munkatársainkat kérjük, hogy kézírataikra mindenkor írják fel a pontos címet, melyre a korrekturák küldendők.

Minden szerzőnek 25 pld. különlenyomatot adunk üres borítékkal (kivéve az *Irodalom*, *Physikai Szemle*, *Physikai Laboratorium*, *Megoldott feladatok* stb. rovatokban megjelent közleményeket). Címzett borítékot vagy több különlenyomatot csak külön kívánságra, a megfelelő költségek felszámításával adhatunk.

Társulati mondanivalók. A huszonharmadik társulati év 1914 január elsején kezdődött.

A tagsági díj (Budapest 10 korona, vidéken 6 korona) az Alapszabályok VII., 12. §-a szerint az év első negyedében esedékes. Kérjük t. Tagtársainkat, szíveskedjenek a tagsági díjat a társulat pénztárnoka: *Privorazsky Alajos* (VII., Ilka-u. 32) címére beküldeni. A befizetések megkönnyítése végett januári füzetünkhöz postai befizető lapokat mellékelünk. **A május végéig be nem érkező tagsági díjakat postai megbízás útján fogjuk beszedni.**

Kérjük tagtársainkat, hogy mindazokat, a kik a matematika vagy fizika iránt érdeklődnek, tagokul ajánlják. A tagajánlások és a társulat ügyeire vonatkozó egyéb kérdések *Zemplén Győző* ügyvivő titkár fenti címére intézendők.

A reklamációk, címímváltozások a pénztárnokhoz intézendők.

MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI LAPOK

E folyóirat évenként 8, legalább három ívnyi füzetben jelenik meg, a nyári hónapok kivételével, a hó második felében.

Előfizetési díj egy évre 10 K, A Matematikai és Fizikai Társulat tagjai a folyóiratot tagságdíjuk fejében kapják.

23. évfolyam.

1914. április.

4. füzet.

A TRANSCENDENS EGÉSZ FÜGGVÉNYEK.

NÖVEKEDÉSÉNEK VIZSGÁLATA KAPCSOLATBAN AZ ANALITIKAI
FÜGGVÉNYEK SZINGULARITÁSAINAK VIZSGÁLATÁVAL.

(Harmadik és befejező közlemény.)

4. §. Az alaptétel bizonyítása.

25. Bevezetjük a következő jelöléseket:

$$\sum_{n=0}^{\alpha-\alpha^{\tau}} b_n x^n = p(x), \quad \sum_{n=\alpha-\alpha^{\tau}}^{\alpha+\alpha^{\tau}} b_n x^n = q(x), \quad \sum_{n=\alpha+\alpha^{\tau}}^{n'_1} b_n x^n = r(x),$$

$$\sum_{n=n'_1+1}^{\infty} b_n x^n = s(x).$$

Ezen jelölést használva, $\frac{F(x)}{G(x)}$ kifejezés felső és alsó határát a következő két egyenlőtlenség adja:

$$\frac{F(x)}{G(x)} \leq \frac{a_{\alpha-\alpha^{\tau}} p(x)}{G(x)} + \frac{a_{\alpha+\alpha^{\tau}} q(x)}{G(x)} + \frac{a_{n'_1} r(x)}{G(x)} + \frac{\sum_{n=n'_1+1}^{\infty} a_n b_n x^n}{G(x)} \quad (26)$$

$$\frac{F(x)}{G(x)} \geq \frac{p(x)}{G(x)} + \frac{a_{\alpha-\alpha^{\tau}} q(x)}{G(x)} + \frac{a_{\alpha+\alpha^{\tau}} r(x)}{G(x)} + \frac{n'_1 s(x)}{G(x)}.$$

Azt már bebizonyítottuk (3. §-ban), hogy

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^k p(x)}{G(x)} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{q(x)}{G(x)} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^k r(x)}{G(x)} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^k s(x)}{G(x)} = 0 \quad (27)$$

úgy hogy

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F(x)}{G(x)}$$

ismeretes lesz, ha meghatározzuk még

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sum_{n=n_1+1}^{\infty} a_n b_n x^n}{G(x)}$$

kifejezést.

$$\sum_{n=n_1+1}^{\infty} a_n b_n x^n = \sum_{n=n_2+1}^{n'_2} a_n b_n x^n + \sum_{n=n_2+1}^{\infty} a_n b_n x^n;$$

n'_2 az n_2 -t közvetlenül megelőző egész szám; n_2 -t a következő egyenlet határozza meg:

$$\sqrt[n_2]{a_{n_2} b_{n_2} x} = 1. \quad (28)$$

26. $F(x)$ maximális tagja.

A maximális taghoz tartozó n -t jelöljük a_1 -gyel. $F(x)$ általános tagja

$$a_n b_n x^n = a_n \frac{x^n}{e^{ng(n)}}.$$

Ennek logaritmikus differenciálhányadosát zérussal egyenlővé téve:

$$\frac{d}{dn} (\log a_n + n \log x - ng(n)) = 0.$$

$$\frac{a'_n}{a_n} + \log x - g(n) - ng'(n) = 0.$$

Ebből

$$\log x = g(n) + ng'(n) - \frac{a'_n}{a_n};$$

$n = a_1$ -t írva

$$x = e^{g(a_1) + a_1 g'(a_1) - \frac{a'_{a_1}}{a_{a_1}}}. \quad (29)$$

A maximális tag ez alapon

$$a_{a_1} \left(\frac{x}{e^{g(a_1)}} \right)^{a_1} = a_{a_1} e^{a_1^2 g'(a_1) - a_1 \frac{a'_{a_1}}{a_{a_1}}}.$$

27. a, a_1, n_1, n_2 közötti összefüggés megállapítása.

Az előbbieken nyertük (12. pont)

$$x = e^{g(a) + ag'(a)};$$

x -nek ugyanezen fix értéket tételezve fel, (4) és (28)-t összevetve írhatjuk

$$e^{g(a) + ag'(a)} = e^{g(a_1) + a_1 g'(a_1)} - \frac{a'_1}{a_{a_1}},$$

vagy tekintve, hogy

$$g(n_1) = g(x) + ag'(a) \quad (8)$$

és hogy (28)-ból

$$x = \frac{e^{g(n_2)}}{\sqrt[n_2]{a_{n_2}}},$$

$$e^{g(n_1)} = (a_{n_2})^{-\frac{1}{n_2}} e^{g(n_2)}.$$

Mindkét oldal logaritmusát véve

$$g(n_1) = -\frac{1}{n_2} \log a_{n_2} + g(n_2),$$

honnan

$$g(n_2) - g(n_1) = \frac{\log a_{n_2}}{n_2}$$

$g(n_2) - g(n_1)$ -re a középértéktételt alkalmazva,

$$g(n_2) - g(n_1) = (n_2 - n_1) g'(pn_1) \quad n_1 < pn_1 < n_2$$

a két utolsó egyenlőségéből

$$(n_2 - n_1) g'(pn_1) = \frac{\log a_{n_2}}{n_2};$$

$n_2 g'(pn_1)$ -vel osztva, mindkét oldalon

$$1 - \frac{n_1}{n_2} = \frac{\log a_{n_2}}{n_2^2 g'(pn_1)}.$$

De mivel $-\eta$ -val tetszőszerinti kis pozitív számot jelölve —

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{1+\eta} g'(n) = \infty,$$

azért a_n -re tett feltevés alapján

$$\lim_{n=\infty} \frac{\log a_{n_2}}{n_2^2 g'(pn_1)} = \lim_{n=\infty} \frac{\log a_{n_2}}{n_2^{1-\eta}} \lim_{n=\infty} \frac{1}{n_2^{1+\eta} g'(pn_1)} = 0$$

következésképpen

$$\lim_{n=\infty} 1 - \frac{n_1}{n_2} = 0,$$

vagyis

$$\lim_{n=\infty} \frac{n_1}{n_2} = 1, \quad (29)$$

mivel pedig

$$\lim_{n=\infty} \frac{a}{n_1} = k$$

kell, hogy

$$\lim_{n=\infty} \frac{a}{n_2} = k. \quad (30)$$

Mivel továbbá

$$a_1 \leq n_2$$

kell, hogy

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_1}{a} = k_2 \quad (31)$$

k, k_1, k_2 véges pozitív számok.

28. $\frac{\sum_{n=n_1+1}^{\infty} a_n b_n x^n}{G(x)}$ kifejezés határértékének megállapítása.

$$\sum_{n=n_1+1}^{\infty} a_n b_n x^n = \sum_{n=n_1+1}^{n_2} a_n b_n x^n + \sum_{n=n_2+1}^{\infty} a_n b_n x^n.$$

$$\lim_{x=\infty} \frac{\sum_{n=n_1+1}^{n_2} a_n b_n x^n}{a_{n_2} G(x)} = 0,$$

mert

$$\sum_{n=n_1+1}^{n_2} a_n b_n x^n < a_{n_2} \sum_{n=n_1+1}^{n_2} b_n x^n.$$

De $b_n x^n < 1$ n_1 -től kezdve, úgy hogy

$$\sum_{n=n_1+1}^{n_2} a_n b_n x^n < a_{n_2} (n_2 - n_1') \frac{1}{q} \quad q > 1$$

$\frac{1}{q}$ -val jelöltük $b_n x^n$ -ek közül a legnagyobbat.

Látjuk tehát, ha tekintetbe vesszük n_2 és n_1 közti összefüggést és a_{n_2} -re tett feltevést, hogy

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sum_{n=n_1+1}^{n_2} a_n b_n x^n}{a_{n_2} S(x)} = 0. \quad (32)$$

$\sum_{n=n_1+1}^{\infty} a_n b_n x^n$ összegben minden tag kisebb, mint 1, mert

$$\sqrt[n_2]{a_{n_2}} \frac{x}{e^{g(n_2)}} = 1$$

n_2 definíciója értelmében és

$$\sqrt[n_2+1]{a_{n_2+1}} \frac{x}{e^{g(n_2+1)}} < 1 = \frac{1}{q_1}.$$

Ugyanis x értéket az n_2 -t definiáló egyenletből az n_1+1 tagba téve

$$\frac{\sqrt[n_2+1]{a_{n_2+1}}}{\sqrt[n_2]{a_{n_2}}} \frac{e^{g(n_2)}}{e^{g(n_2+1)}}$$

$\frac{e^{g(n_2)}}{e^{g(n_2+1)}} < 1$, mert $g(n)$ növekvő függvény, $\frac{\sqrt[n_2+1]{a_{n_2+1}}}{\sqrt[n_2]{a_{n_2}}}$ is kisebb, mint 1,

mert $\sqrt[n]{a_n}$ fogyó függvény, mivel differenciálhányadosa

$$\frac{d}{dn} \sqrt[n]{a_n} = \frac{d}{dn} e^{\frac{\log a_n}{n}} = e^{\frac{\log a_n}{n}} \frac{1}{n_2} [1 - \log a_n]$$

negatív bizonyos $n > N$ -től kezdve.

Ez alapon

$$\sum_{n=n_1+1}^{\infty} a_n b_n x^n < \sum_{n=n_2+1}^{\infty} \left(\frac{1}{q_1}\right)^n,$$

$$\sum_{n=n_2+1}^{\infty} \left(\frac{1}{q_1}\right)^n = \frac{q_1}{q_1-1} \left(\frac{1}{q_1}\right)^{n_1+1} \leq \frac{q_1}{q_1-1} \left(\frac{1}{q_1}\right)^{n_2} \quad (33)$$

Ez utóbbi kifejezés pedig 0 felé tart, ha x a ∞ felé tart.

29. Az $\frac{F(x)}{a^\alpha G(x)}$ kifejezés határértéke. A (26) egyenlőtlenségek mindkét oldalát a_α -val osztva és a (27), (30), (32) és (33) alatti összefüggésekre tekintve a következő egyenlőtlenségeket nyerjük:

$$\frac{a_{\alpha-\alpha\tau}(1+\varepsilon_n^1)}{a_\alpha} \leq \frac{F(x)}{a_\alpha G(x)} \leq \frac{a_{\alpha+\alpha\tau}}{a_\alpha} (1+\varepsilon_n) \quad (26^*)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n^1 = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0,$$

mivel

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{\alpha+\alpha\tau}}{a_\alpha} = 1$$

és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{\alpha-\alpha\tau}}{a_\alpha} = 1$$

nyerjük,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F(x)}{a_\alpha G(x)} = 1.$$

Tehát az $F(x)$ és az $a_\alpha G(x)$ viszonyának határértéke 1.

30. Az a_n nagyságrendjének megállapítása.

Mivel a_n k -ad rendű polinom n -ben

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_k} = k$$

k véges szám.

a -t (4) egyenletből nyerjük és $= f(x)$; úgy hogy írhatjuk

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F(x)}{[f(x)]^k G(x)} = k \quad k \text{ véges szám}$$

De mivel

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{n_1} = k,$$

ahol n_1 az $e^{g(n)}$ inverz függvénye, $f(x)$ az $e^{g(n)}$ inverz függvényével megegyező rendű függvény. Ezzel (I) tételt bebizonyítottuk.

5. §. Az I. tétel alkalmazása.

31. Az egész függvény differenciálhányadosa növekedésének vizsgálata.

Az (I) tétel speciális eseteként adódik a következő tétel:

Ha adva

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

egész függvény, ahol

$$b_n = \frac{1}{e^{ng(n)}},$$

$g(n)$ pozitív folytonosan növekvő függvény, melynek van első és második differenciálhányadosa, akkor, ha $G^{(r)}(x)$ jelenti $G(x)$ -nek r . differenciálhányadosát és $f(x)$ az $e^{g(n)}$ inverz függvényét, akkor az egész függvény differenciálhányadosának növekedését meghatározza a következő kifejezés:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^r G^{(r)}(x)}{[f(x)]^r G(x)} = C \quad (\text{III})$$

C véges, nem nulla szám.

Bizonyítás.

Ha (I) tételünkben $a_n = n^r$, akkor

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n^r b_n x^n$$

de

$$x^r G^{(r)}(x) = \sum_{n=\infty}^{\infty} n^r b_n x^n$$

következésképpen tényleg áll (III).

Látjuk tehát, hogy ha ismerjük az egész függvény együtt-hatóit, meghatározhatjuk nem csupán az egész függvény felső

határától, de meghatározhatjuk az egész függvény növekedéséből differenciálhányadosának növekedését is.

32. Jelentsen p , q és r egy-egy BOREL-féle¹ szimbolumot és legyen

$$G(x) \sim p, \quad G^{(k)}(x) \sim q, \quad f(x) \sim p,$$

akkor

$$q = p + kr - k;$$

r mindig meghatározható $G(x)$ együtthatóiból, mert bebizonyítottuk, hogy $f(x)$ rendje megegyezik az $e^{g(n)}$ inverz függvényének nagyságrendjével.

Eddigi eredményeink alapján bebizonyítjuk a következő tételt:

33. *Ha adva*

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta(n) \frac{x^n}{e^{ng(n)}}$$

egész függvény, ahol $g(n)$ folytonos, n -nel ∞ -ig nő, van első és második differenciálhányadosa és p_0 és p_1 -gyel jelölve, két pozitív számot bizonyos n -től kezdve

$$np_0 - \varepsilon < \beta(n) < np_1 + \varepsilon, \quad (31)$$

ahol ε tetszőszerinti kis pozitív szám, akkor

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F(x)}{[f(x)]^{p_1 + \varepsilon} G(x)} = 0$$

és

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F(x)}{[f(x)]^{p_0 - \varepsilon} G(x)} = \infty \quad (IV)$$

ahol

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{e^{ng(n)}}$$

¹ BOREL: Leçons sur la théorie de la croissance, GAUTHIER VILLARS, Paris, 1912.

és $f(x)$ az $e^{g(n)}$ inverz függvényével megegyező nagyságrendű függvény.

Ugyanis a (34) feltételből következik, hogy

$$\lim_{n=\infty} \frac{\beta(n)}{n^{p_1+\varepsilon}} = 0$$

és

$$\lim_{n=\infty} \frac{\beta(n)}{n^{p_0-\varepsilon}} = \infty.$$

Legyen

$$F_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n^{p_1+\varepsilon} \frac{x^n}{e^{ng(n)}};$$

alkalmazzuk CÉSARO tételét $F(x)$ és $F_1(x)$ függvényekre

$$\lim_{x=\infty} \frac{F(x)}{F_1(x)} = \lim_{x=\infty} \frac{\beta(n)}{n^{p_1+\varepsilon}} = 0.$$

Másrészt (I) tétel alapján

$$\lim_{x=\infty} \frac{F_1(x)}{[f(x)]^{p_1+\varepsilon} G(x)} = 1,$$

ahol $f(x)$ az $e^{g(n)}$ inverz függvényének nagyságrendjével megegyező függvényt jelent, miből következik, hogy

$$\lim_{x=\infty} \frac{F(x)}{[f(x)]^{p_1+\varepsilon} G(x)} = 0.$$

A második rész bizonyítására hasonlitsuk össze $F(x)$ és $F_2(x)$ függvényeket, ahol

$$F_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n^{p_0-\varepsilon} \frac{x^n}{e^{ng(n)}},$$

$$\lim_{x=\infty} \frac{F_2(x)}{F(x)} = \lim_{n=\infty} \frac{n^{p_0-\varepsilon}}{\beta(n)} = 0;$$

(I) tétel alapján tudjuk, hogy

$$\lim_{x=\infty} \frac{F_1(x)}{[f(x)]^{p_0-\varepsilon} G(x)} = 1.$$

ahol $f(x)$ nagyságrendje megegyezik $e^{g(n)}$ inverz függvényének nagyságrendjével. Következésképpen

$$\lim_{x=\infty} \frac{F(x)}{[f(x)]^{p+\varepsilon} G(x)} = 0$$

és

$$\lim_{x=\infty} \frac{F(x)}{[f(x)]^{p-\varepsilon} G(x)} = \infty.$$

Ugyancsak áll a következő tétel:

34. *Adva*

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta(n) \frac{x^n}{e^{ng(n)}}$$

egész függvény, ahol $g(n)$ folytonosan nő n -nel végtelenig, van első és második differenciálhányadosa és

$$\beta(n) = r + r_1 \frac{1}{\omega} + \dots + r_{i-1} \frac{1}{\omega_{i-1}} + r(r_i) \frac{1}{\omega^i},^1$$

akkor

$$\lim_{x=\infty} \frac{F(x)}{g[f(x)] \{\log_i [f(x)]\}^{r_i+\varepsilon} G(x)} = 0$$

és

$$\lim_{x=\infty} \frac{F(x)}{g[f(x)] \{\log_i [f(x)]\}^{r_i-\varepsilon} G(x)} = \infty$$

ahol $g[f(x)]$ nagyságrendje $f(x)$ -ben

$$g(x) \sim r + r_1 \frac{1}{\omega} + \dots + r_{i-1} \frac{1}{\omega_{i-1}}$$

és $f(x)$ nagyságrendje $e^{g(n)}$ nagyságrendjéből meghatározható.

A bizonyítás az előbbihez analog módon eszközölhető.

$\beta(n)$ -nek adhatunk még más alakot is, de ezekre az esetekre már nem térünk ki.

Az utolsó két tétel tekinthető DIENES P.-nek² az exponenciális függvényenyl képzett egész függvény növekedésére vonatkozó tétel általánosításának. A bizonyításnál követtük DIENES P. tétele bizonyításának menetét.

¹ (r) jelenti, hogy $r-\varepsilon < r < r+\varepsilon$. L. BOREL: Théorie de la croissance. 35. old.

² DIENES: Essai sur les singularités des fcnct. anat. Journal de Math. 1909.

6. §. Az egész függvénynyel képzett Mittag Leffler-féle előállítás nagyságrendjének meghatározása algebrai logaritmikus szingularis helyen.

36. Ha a vizsgált analitikai függvény a következőképen írható:

$$F(x) = \frac{A_r \left(\log \frac{1}{1-x} \right)}{(1-x)} + F_1(x)$$

ahol $A_r(a)$ r -ed rendű polinom a -ban; $x=1$ a csillagtartomány csúcsában fekvő pont és az $F_1(x)$ rendje $k_1 < k$, és ha

$$G(\gamma) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\gamma^n}{e^{ng(n)}}$$

egész függvénynyel, hol $g(n)$ folytonos, n -nel ∞ -ig növekvő függvény, melynek van első és második differenciálhányadosa, képezzük a MITTAG-LEFFLER-féle $M_\gamma(x)$ általános összeget az $x=1$ pontra, akkor ezen összeg nagyságrendjét a következő kifejezés határozza meg

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{M_\gamma(x)}{[f(\gamma)]^k [\log f(\gamma)]^r} = c \quad (\text{VI})$$

ahol c véges, nem nulla szám és $f(\gamma)$ nagyságrendje megegyezik az $e^{g(n)}$ inverz függvényének nagyságrendjével.

Ugyanis esetünkben $M_\gamma(x)$ nagyságrendje megegyezik a következő kifejezés nagyságrendjével:

$$M_\gamma^*(x) = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} n^k (\log n)^q \frac{\gamma^n}{e^{ng(n)}}}{c \sum_{n=\infty}^{\infty} \frac{\gamma^n}{e^{ng(n)}}} \quad (35)$$

mert az $x=1$ helyen

$$s_n \sim k + r \frac{1}{\omega}.$$

¹ DIENES P. és V.: Recherches nouvelles etc. Annales de l'École Normale supérieure 28. k. 1911.

Elég tehát $M_{\gamma}^*(x)$ nagyságrendjét meghatározni az x helyen.

37. $M_{\gamma}^*(x)$ nagyságrendjének megállapítása. Kövessük

$$a_n = n^k (\log n)^r$$

helyettesítés után az (I) tétel bizonyításának menetét és (26*)-nek megfelelőleg a következő egyenlőtlenségekhez jutunk:

$$\begin{aligned} \lim_{x=\infty} \frac{(a-x)^k \{\log(a-x^r)\}^r}{a^k (\log a)^r} (1+\varepsilon'_n) &\leq \lim_{x=\infty} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} n^k (\log n)^r b_n \gamma^n}{a^k (\log a)^r G(\gamma)} \leq \\ &\leq \lim_{x=\infty} \frac{(a+x^r)^k \{\log(a+x^r)\}^r}{a^k (\log a)^r} (1+\varepsilon_n) \quad \lim_{n=\infty} \varepsilon'_n = 0, \quad \lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 0. \end{aligned}$$

De

$$\lim_{n=\infty} \frac{a \pm a^r (\log(a \pm a^r))^q}{a^r \log a} = \lim_{n=\infty} \frac{a^r (\log a)^r \pm h(a)}{a^k (\log a)^r},$$

ahol

$$\lim_{x=\infty} \frac{h(a)}{a^k \log a} = 0,$$

úgy hogy

$$\lim_{x=\infty} \frac{(a \pm a^r)^k \{\log(a \pm a^r)\}^r}{a^k \log a} = 1,$$

tehát

$$\lim_{x=\infty} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} n^k \log n)^r b_n \gamma^n}{a^k (\log a)^r G(\gamma)} = 1.$$

Ha most tekintetbe vesszük, hogy

$$a = f(x)$$

az

$$n_1 = \phi(x)$$

függvénynyel megegyező rendű és hogy $\phi(x)$ az $e^{g(n)}$ inverz függvénye, nyerjük

$$\lim_{\gamma=\infty} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} n^k (\log n)^r b_n \gamma^n}{[f(\gamma)]^k [\log f(\gamma)]^r G(\gamma)} = c$$

c véges nem nulla szám.

(35) alapján írható

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} \frac{M_{\gamma}^*(x)}{[f(\gamma)]^k [\log f(\gamma)]^r} = C \quad (36)$$

C véges szám.

Mivel pedig $M_{\gamma}^*(x)$ és $M_{\gamma}(x)$ nagyságrendben megegyeznek (36) összefüggés egyúttal bizonyítja (VI) tételünket.

38. Szabály az $M_{\gamma}(x)$ általános összeg nagyságrendjének meghatározására az x_0 algebrai logaritmikus pontban.

Ha az x_0 az $F(x)$ analitikai függvénynek algebrai logaritmikus szinguláris pontja, akkor

$$F(x_0) \sim k + r \frac{1}{\omega}.$$

k, r pozitív számok, $\frac{1}{\omega}$ a $\log x$ nagyságrendjét jelöli és

$$e^{g(n)} \sim \beta,$$

ahol β tetszésszerű BOREL-féle szindumot jelent, akkor (VI) szerint

$$M_{\gamma}(x_0) \sim k \frac{1}{\beta} + r \frac{1}{\omega} \frac{1}{\beta}.$$

De

$$k \frac{1}{\beta} + r \frac{1}{\omega} \frac{1}{\beta} = \left(k + r \frac{1}{\omega} \right) \frac{1}{\beta}.$$

Következőleg

$$M_{\gamma}(x_0) \sim \left(k + r \frac{1}{\omega} \right) \frac{1}{\beta} \quad (VI^*)$$

Tehát az $M_{\gamma}(x_0)$ nagyságrendjét kifejező szimbolumot megkapjuk, ha az $F(x_0)$ nagyságrendjét kifejező szimbolumot szo-

¹ Ha c_1, c_2, \dots, a BOREL féle szimbolumok, akkor

$$(c_1 + c_2 + \dots) a = c_1 a + c_2 a + \dots$$

ellenben általában

$$a(c_1 + c_2 + \dots) \neq ac_1 + ac_2 + \dots$$

² BEREL: Théorie de la croissance 22. old.

rozzuk $\frac{1}{\beta}$ -val; ez utóbbi pedig az összegező függvény együtt-hatóiból könnyen meghatározható.

39. Eddig nyert eredményeink alapján felelhetünk a 2. §-ban feltett azon kérdésre: melyik azon egész függvény, melylyel képezve az általános összeget, annak növekedése algebrai logaritmikus szinguláris pontban megegyezzek a vizsgált függvény növekedésével. Ha x_0 az $F(x)$ analitikai függvény algebrai logaritmikus szinguláris helye, melyik egész függvényt használjuk az I–V tételeknek megfelelő egész függvények közül összegező függvénynek, hogy álljon

$$M_Y(x_0) \sim F(x_0). \quad (37)$$

Mit jelent ez a megegyezés? (VI*) szerint azt, hogy

$$\beta \sim 1,$$

azaz $e^{g(n)}$ nagyságrendje megegyezik n nagyságrendjével; de ha

$$e^{g(n)} \sim 1,$$

akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\frac{1}{2}}}{e^{g(n)}} = 0,$$

a mi POINCARÉ¹ tétele alapján azt mondja, hogy $G(x)$ véges fajú egész függvény.

De hogy $G(x)$ összegező függvénynek használható legyen, eleget kell tennie a MITTAG-LEFFLER-féle két feltételnek (2. §.). Csakhogy PHRAGMÉN² bebizonyította, hogy mindazon egész függvények, melyek eleget tesznek a MITTAG-LEFFLER-féle 1. feltételnek, végtelen rendűek. Ennek következtében az összegező egész függvényre

$$\beta \neq 1$$

¹ POINCARÉ: id. mű; l. még BOREL: Leçons sur les fonctions entières. Paris, 1900. 55. old.

² PHRAGMÉN: Sur une extension d'une theoreme classique de la theorie des fonctions. Acta Math. 28. k.

(37) tehát nem állhat fenn. Kimondhatjuk tehát, hogy ha az I—V. tételeknek megfelelő egész függvények közül választjuk az összegező függvényt:

az $F(x)$ analitikai függvény x_0 algebrai logaritmikus singuláris helyére képezve az $M_\gamma(x)$ általános összeget, ennek nagyságrendje p nem egyezik meg az $F(x_0)$ nagyságrendjével q -val, hanem

$$p > q.$$

Tillinger Istvánka.

A JÁRADÉKSZÁMÍTÁS KAMATLÁBPROBLÉMÁJA.

(Első közlemény.)

I. Bevezetés.

A háromtagú (trinomikus) egyenletek algebrai és számítógépes feldolgozása GAUSS egyik alapvető értekezésében teljes elintézését nyert.¹ GAUSS mindenekelőtt azt hangsúlyozta, hogy az algebrai megoldási módszerek a keresett gyök sorba fejtésén alapuló eljárások mellett gyakorlati tekintetben okvetlenül figyelembe veendők. A trinomikus egyenletek fontosabb alkalmazásainak egyike a járadékszámítás legegyszerűbb kamatlábfeladata; ezen probléma gyakorlati tárgyalásánál a szakirodalomban majdnem kivétel nélkül² olyan módszereket találunk, melyek a sorfejtést, vagy az erre visszavezethető összetettebb kiindulási pontokat veszik alapul.³ Az ebbe a csoportba tartozó pontosabb eljárások egyik hátránya, hogy a feladatok megoldásához speciális táblázatokra szorulnak.

Ígaz, hogy legtöbbször primitívebb megközelítések is elegendők. Különösen, ha csak tájékoztató értékekre van szükségünk;

¹ Beiträge zur Theorie der algebraischen Gleichungen. II. Abt. (Werke III. köt. 85—96. o.).

² A trinomikus egyenletek GAUSS-féle elméletének tárgyalásával kapcsolatosan RUNGE: «Praxis der Gleichungen» cz. munkájában (Sammlung Schubert. Leipzig, Göschen, 1900. 20. §.) példaként bemutatja a kamatlábprobléma megoldását, nem térve ki azonban a kérdés részleteire. Tárgyalását reprodukálja BROGGI: «Versicherungsmathematik» (Leipzig. Teubner, 1911) cz. könyvében (173—175. o.).

³ Részletes tárgyalást I. BEIN-BOGYÓ-HAVAS: «Politikai Számtan» cz. kézikönyvnek I. köt. IV. fejezetében, továbbá I. Inst. of Act. Text Book (London 1901) I. köt. VI. feje. és az újabb nagyobb politikai számtani munkák (MARIE, BARRIOL, MAINGIE, stb.) idevonatkozó fejezetét.

de ha a GAUSSTól direktnek nevezett megoldási eljárások bő irodalmát áttekintjük, azt hisszük, érdemes munka mai nap, hogy az indirekt út részleteit is megvizsgáljuk. Dolgozatunk törekvése, hogy az algebrai módszerek gyors és megfelelő alkalmazhatóságát bemutassa és hogy ráutaljon arra, hogy ezen az úton a felmerülő kérdések algebrai diszkussziója is egyszerűen elintézhető. A kiindulási pont tehát a kamatlábfeladatok jellemző trinomikus egyenlet közelebbi tanulmányozása; ebből vezethetők le részben algebrai, részben grafikai segédeszközökkel a legcélszerűbb megoldási eljárások.

A probléma algebrai megfogalmazása (II. fejezet) után be fogjuk mutatni a GAUSS-féle eljárás alkalmazhatóságát, kiemelve, hogy a kérdés tárgyi háttere biztosítja az algebrai diszkusszió eredményeit. A számító rész egyszerűségét az által fogjuk elérhetni, hogy GAUSS eljárását kombináljuk MEHMKE módszerével, a mely egyenletek valós gyökeinek praktikus kiszámítását célozza.¹ Ilyen módon sikerülni fog, hogy az eredmény kellő pontossággal történő meghatározásánál a közönséges logaritmustáblázaton kívül csak a GAUSS-féle addicziós-logaritmuss táblázatok legegyszerűbb alakját használjuk. (III. fejezet.)

Dolgozatunk IV. fejezetében a *függvényiteráció* folyamatát alkalmazzuk a kamatlábfeladat megoldására. E módszert már a múlt század nyolczvanas éveiben használták a jelzett körben² és miután a kérdések általános elmélete NETTO, ISENKRAHE és HEYMANN munkálataival közelebbi tanulmányozás tárgya volt, HEYMANN³ egy végleges formulában összegezte az elért ered-

¹ Praktische Methode zur Berechnung der reellen Wurzeln algebraischer oder transcender numerischer Gleichungen mit einer Unbekannten (Zeitschr. für Math. und Physik, XXXVI. 1891).

² Utalunk HOFFMANN (Arch. für Math. und Physik 1881), GÜNTHER (Zeitschrift für math. und naturwiss. Unterricht XI. 1887) és v. SCHAEWEN (ugyanott) dolgozataira.

³ NETTO: Math. Ann. XXIX. 1879. és «Vorlesungen über Algebra» (Leipzig. Teubner, 1896.) I. köt. 300—305. o.; ISENKRAHE: Math. Ann. XXXI. 1881. és «Das Verfahren der Funktionswiederholung (Leipzig. Teubner, 1897.); HEYMANN: Zeitschr. für Math. und Phys. XXXIX. 1894, 327—354. o., továbbá

ményeket. E dolgozatok azonban a politikai számtan szakirodalmában kevésbé ismereteseek, továbbá nem intézték el teljesen a speciális problémával kapcsolatos konvergencia-kérdést. Meg fogjuk mutatni, hogy e feladatok teljesítése ugyanazon az egyszerű tételen alapszik, mint a mely a GAUSS-féle eljárásához fűzhető algebrai taglalásnál szerepel.

Az utolsó fejezetben problémánk *grafikai* megoldásával foglalkozunk, még pedig az ú. n. *logarithmografikai* eljárás alkalmazásával. Ezt a módszert MEHMKE¹ vezette be, 1889-ben legelőször, az algebrai egyenletek gyakorlati fejezetébe. A grafikai tárgyalás kapcsán a feladat összes jellemző adatai szemléletes módon mutathatók be.²

II. A probléma megfogalmazása.

1. A járadékszámítás kamatlábproblémája algebrai alakjában speciális n -ed fokú egyenlethez vezet. Egyszerűsége és a gyakorlati kérdések megoldásánál való túlnyomó előfordulása szempontjából legfontosabb a *trinomikus* egyenlet esete, e mellett meg kell emlékeznünk a *quadrinomikus*, sőt még magasabb rendű esetekről is.

Az alapvető feladat a következő: A szerint, a mint a jára-

HEYMANN: «Über die Auflösung der Gleichungen durch Iteration auf geometrischer Grundlage» (Jahresber. der Techn. Lehranstalten; Chemnitz 1907.) L. továbbá JUCKEL dolgozatát a Keresked. Szakokt. XXI. [1912] évf.

¹ Neue Methode beliebige numerische Gleichungen mit einer Unbekannten graphisch aufzulösen (Zivilingenieur, XXXV. 1889); L. továbbá: Encyklop. der math. Wiss. I. F. 48.; v. DYCK katalógusát (München. Wolf 1893, Nachtrag 10—16. o.), d'OCAGNE: «Traité de Nomographie» (Paris. Gauthier Villars, 1899. 376—389. o.) és «Calcul graphique et Nomographie» (Encycl. scient., Paris. Doin, 1908. 361—363. o.), BIERMANN: «Vorlesungen über math. Näherungsmethoden»¹ (Braunschweig. Vieweg, 1905. 64. o.)

² Dolgozatunk összefoglaló és részben bővített átdolgozásban adja a Math. és Phys. Társ. 1911 jan. 19-iki ülésén tartott előadásunk, továbbá a Zeitschr. für Math. und Physik-ben (LIX. 1911. 410—431. o.) és a Keresked. Szakoktatásban (XIX. 1911. 420—424. o.) megjelent értekezéseink tartalmát.

dék felkamatolt értéke (U) vagy diszkontált értéke (E) van megadva, a járadékszámítás legegyszerűbb képletei:

$$U_n = \frac{R}{i} (r^n - 1), \quad U_n^{(1)} = U_n \cdot r$$

$$E_n^{(1)} = \frac{R}{i} \frac{r^n - 1}{r^n}, \quad E_n = E_n^{(1)} \cdot r$$

(R :járadéktag, n :időszakok száma, i :tőkeegység egy időszaki utólagos kamatja, $r=1+i$:kamattényező).

Ha a kamatláb az ismeretlen, az

$$r = x, \quad \frac{1}{r^n} = z,$$

$$\frac{U_n}{R} = s_{\overline{n}|} > 1, \quad \frac{U_n^{(1)}}{R} = \sigma_{\overline{n}|} > 1$$

$$\frac{E_n^{(1)}}{R} = a_{\overline{n}|} > 1, \quad \frac{E_n}{R} = \mathbf{a}_{\overline{n}|} > 1^1$$

jelölések bevezetésével a következő *háromtagú* egyenletekhez jutunk:

$$x^n - s_{\overline{n}|}x + s_{\overline{n}|} - 1 = 0$$

$$x^{n+1} - (\sigma_{\overline{n}|} + 1)x + \sigma_{\overline{n}|} = 0$$

$$z^{n+1} - (\mathbf{a}_{\overline{n}|} + 1)z + \mathbf{a}_{\overline{n}|} = 0$$

$$z^n - \mathbf{a}_{\overline{n}|}z + \mathbf{a}_{\overline{n}|} - 1 = 0.$$

Tárgyi szempontok alapján a négy, analog felépítésű egyenlet *két* csoportba sorozandó; ha ugyanis az általános alak:

$$u^k - au + a - 1 = 0 \quad (a > 1) \quad (1)$$

a szerint, a mint

- A) $a > k$: az első két
B) $a < k$: az utolsó két

egyenlet tárgyi háttérét jellemeztük.¹

¹ $s_{\overline{n}|}$, $\sigma_{\overline{n}|}$, $a_{\overline{n}|}$, $\mathbf{a}_{\overline{n}|}$ a járadéktag egységnek megfelelő felkamatolt, illetőleg diszkontált értékek, $n > 1$ felvétellel.

² Ugyanis:

$$s_{\overline{n}|}, \sigma_{\overline{n}|} > n \quad \text{és} \quad a_{\overline{n}|}, \mathbf{a}_{\overline{n}|} < n.$$

Ezeknek az egyszerű — de a gyakorlatban alapvető — eseteknek tárgyalása tehát az 1. egyenlet megoldásával történik. A trinomikus egyenlet fellépése azonban csak *specziális* jellegű, a mennyiben a járadékszámítás *általános* kiindulási pontjául az $U_n^{(k)}$, ill. $E_n^{(k)}$ értékeket választhatjuk. Ilyen alakban a trinomikus egyenlethez csak a

$$k = 0, 1$$

esetekben jutunk, míg általánosan *négyszemű* egyenlettel van dolgunk. Ugyanis az

$$\frac{U_n^{(k)}}{R} = s_{n|k}, \quad \frac{E_n^{(k)}}{R} = k|a_n$$

jelölések bevezetésével a megfelelő két egyenlet a következő:

$$\begin{aligned} x^{n+k} - x^k - s_{n|k}x + s_{n|k} &= 0 \\ z^{n+k} - z^k - k|a_n z + k|a_n &= 0. \end{aligned}$$

E két egyenlet az említett tárgyi különválasztással az

$$w^{n+k} - w^k - aw + a = 0 \begin{cases} A) & a > n \\ B) & a < n \end{cases} \quad (2)$$

alakban foglalható össze.

Ha áttekintjük már most a járadékszámítás legfontosabb gyakorlati problémáit és ha ezeket a kamatlábprobléma tekintetében algebrai alakban jellemezzük, felváltva találkozunk a háromtagú vagy négyszemű egyenletek esetével. Két tipikus példa a következő:

a) Kölcsönök jövedelmezőségének és megadott árfolyam paritásának számításánál a trinomikus esettel van dolgunk. Az előforduló kamatlábprobléma az 1. B) tipushoz tartozik:

$$z^{n+1} - (e + 1)z + e = 0,$$

a hol z a tényleges kamattényező, n a törlesztés tartama,

$$e = \frac{Aa_n}{100}$$

¹ Felkamatolt ill. diszkontált érték k időszakkal az utolsó ill. első tag esedékessége után ill. előtt.

(A : megadott árfolyam, a_n a névleges kamatlábbal van számítva).¹

b) Az n -ik időszak végén névértékben visszafizetendő, P névleges kamatozású és A árfolyammal beszerzett értékpapír tényleges kamatozásának kiszámítása a

$$z^{n+1} - \frac{100}{100 + P} z^n - \frac{A + P}{100 + P} z + \frac{A}{100 + P} = 0$$

quadrinomikus egyenlethez vezet (z a tényleges kamattényező).²

Ezen egyenlet általános alakja:

$$u^{n+1} - au^n - bu + (a + b - 1) = 0.$$

Egy érdekes alkalmazása háromtagú egyenletünknek az egyszerű kamat elméletében ismeretes MOSER-féle probléma átvitele a kamatos kamat esetére.

A különböző gyakorlati kérdések *nagyrészt* e két csoportba tartozó kamatlábproblémával vannak kapcsolatban. Azonban több példát említhetünk, melyben e típusoktól eltérő felépítésű egyenletekkel találkozunk. Csak néhány fontosabb példa felsorolására szorítkozunk:

a) Ha a járadéktagok mértani sort alkotnak, a megfelelő kamatlábprobléma háromtagú egyenlethez vezet ugyan, de a két utolsó együttható közötti egyszerű kapcsolat (különbségük = 1) már nem ismerhető fel.

b) A p K -val kezdődő és $(n-1)$ időszakon át q K -val emelkedő járadéktagok diszkontált értékét pl. az első időszak elejére a -val jelölve, a megfelelő kamatlábprobléma a következő *öttagú* egyenlethez vezet:

$$\begin{aligned} r^{n+2} - \frac{p + 2a}{a} r^{n+1} + \frac{p + a - q}{a} r^n + \\ + \frac{p + nq}{a} r - \frac{p + nq - q}{a} = 0. \end{aligned}$$

¹ L. német dolgozatunk utolsó pontját (430—431. l.).

² Más fogalmazásban l. v. MANGOLDT: Über eine Aufgabe der kaufmännischen Arithmetik. (Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung, IX[1900] 136—140. o.) A képletet l. BEIN-BOGYÓ-HAVAS, I. 232. o.

vagy más alakban:

$$z^{n+2} - \frac{p+nq}{p+nq-q} z^{n+1} - \frac{p+a-q}{p+nq-q} z^2 + \\ + \frac{p+2a}{p+nq-q} - \frac{a}{p+nq-q} = 0.$$

Hasonló a feladat, ha a felkamatolt értékből indulunk ki, melyet egy időszakkal az utolsó lejárát után veszünk tekintetbe.¹

c) Öttagú egyenletekhez jutunk — még pedig a b) alattihoz hasonló felépítéssel — a következő kamatlábproblémák esetében:

1. Adott árfolyam mellett a kölcsön tényleges kamatlábának kiszámítása, ha az annuitáson kívül a tartozás mindenkor maradákból bizonyos % jutalék is fizetendő.²

2. Adott árfolyam mellett a tényleges kamatláb kiszámítása, ha minden időszak végén a kölcsönösszeg n -ed része és a maradék után járó kamat fizetendő.³

3. A kötvényes kölcsönök adás-vételénél általánosan megfogalmazható tényleges kamatláb-probléma, ha a felmerülő legfontosabb költségeket is figyelembe vesszük.⁴

Vázlatos áttekintésünk eredménye tehát, hogy az alapvető feladat trinomikus egyenletén kívül a gyakorlat követelményeinek tekintetében a négytagú és az öttagú egyenletek is fontossággal bírnak. A bevezetésben említett indirekt algebrai módszerek különösen egyszerűek a trinomikus egyenlet esetében. Dolgozatunk célja, hogy az ismeretes direkt módszerek mellett bemutassuk ezen megoldási eljárások czélszerűségét és alkalmaz-

¹ A kiinduláshoz szükséges képleteket az a) és b) esetben l. BEIN-BOGYÓ-HAVAS I. k. IV. fejt. 4 (104—109. o.).

² A szükséges képletet l. ugyanott 233—234. o. Az állandóan kihasított jutalék esete trinomikus egyenlethez vezet.

³ A kiinduláshoz szükséges képletet l. ugyanott 235—236. o.

⁴ A megfelelő feladat megfogalmazását l. BARRIOL: *Théorie et pratique des opérations financières* (Enc. scient.; Paris. Doin, 1908). II. rész, IV. fejezet.

hatóságát. E munkában csak a trinomikus egyenlet tárgyalására szorítkozunk, mivel a gyakorlat szempontjából a magasabb esetekben a direkt módszerek jelentősége lép előtérbe. Azt hisszük azonban, hogy a bemutatandó eljárások ezen utóbbi problémák algebrai diskussziója és grafikai tárgyalása terén is útmutatással fognak szolgálhatni.

Goldziher Károly.

AZ ATÓMOK SZERKEZETÉRŐL.¹

(Első közlemény.)

1. Bevezetés.

Az utóbbi esztendő kutatásai rendkívül valószínűvé teszik az atóмок létezését;² viszont azt tapasztaljuk, hogy magas hőmérséklet, nagy rezgésszámú éterhullámok, vagy bizonyos vegyi folyamatok hatása alatt, sőt egyes elemeknél a külső behatástól függetlenül (radioaktivitás), kis elektromos részecskék hagyják el az anyagot, illetve az anyag atómjait és e nagy eleven erejű részecskék útjukba helyezett többé-kevésbbé vastag anyagrétegeken, az *atómok rétegein* keresztül haladnak. Ha az atóombokból elektromos részecskék jönnek ki, és ha nagy eleven erejű részek az atómon keresztül haladhatnak, úgy az atóмок nem állhatnak anyaggal egyenletesen megtöltött gömböcskéből. Milyen az atóмок szerkezete? Milyen összefüggés áll fenn az atóm belső és külső tulajdonságai között, mely utóbbiak alatt az atóмок fizikai és kémiai tulajdonságait értjük? Milyen változásnak kell az atómon belül végbe mennie, hogy egy atómból egy másik atóm, egy elemből egy másik elem legyen? Ezek a kérdések képezik a tárgyát a természettan egy új fejezetének, melynek jelenlegi állását vázolja a jelen közleménysorozat.

¹ Előadta a szerző a Matematikai és Fizikai Társulat 1913. évi november 14-én tartott ülésén.

² Az idevonatkozó kísérletek és érvek szép összefoglalását tartalmazza J. PERRIN: *Les Atomes* (Paris, 1913.) című könyve.

2. Az atómszerkezet vizsgálatának a módszerei.

Az elektromos töltésű részecskék, melyeknek mai elméleteink szerint az atómszerkezet kutatásánál oly fontos szerep jut, két csoportba oszlanak, az egyik tartalmazza a negatív töltésű részecskéket, negatív elektronokat, melyeknek a tömege a hidrogén-atómnak kb. $\frac{1}{2000}$ része és sugara kb. 10^{-12} cm, tehát tizezred része az atom sugarának. A katódsugárcsomó részeit alkotó elektronok, az ultrahibolya fény hatása alatt keletkezők, valamint termikus úton fellépők, továbbá azok, a melyeket bizonyos kémiai folyamatok, mint pl. a fém-kálium oxidálása közben szabadulnak föl, továbbá a radioaktív átalakulásnál fellépő « β » részek mind azonosok, csupán kezdő sebesség tekintetében különböznek. A következőkben ezen negatív elektronekról röviden csak mint « β » részecsről fogunk szólni. Függetlenül attól, vajjon radioaktív átalakulás termékei vagy bármely más úton jöttek létre.

A második csoport, mely a pozitív töltésű részecskéket tartalmazza, sokkal heterogénebb képet nyújt: a pozitív elektromosság, mint azt még tüzetesebben fogjuk tárgyalni, mindig csupán anyagi atomokhoz kapcsolva léphet fel; míg negatív elektron csak egyféle van, addig pozitív annyiféle, ahányféle anyagi atom, ahány elem létezik. Így léteznek egy vagy több pozitív töltéssel ellátott argon-, higany-, szén- stb. atomok. A pozitív töltésű atomokat mégis sikerül két főcsoportba osztani, melyek közül az egyik magába foglalja azon pozitív töltésű részecskéket, melyeknek az átmérője atómatmérő nagyságú (10^{-8} cm), mint például az Ar^+ , Ar^{++} , Ar^{+++} , C^+ , C^{++} , Hg^+ , Hg^{++} , Hg^{+++} , Hg^{++++} stb., a másik viszont azon pozitív töltésű részecskéket, melyeknek a tömege ugyan atom nagyságú, de a kiterjedése, az átmérője csak olyan nagy, mint az elektrone (10^{-12} cm). Ez utóbbi csoport legismertebb képviselője az úgynevezett « α » rész, a kettős pozitív töltéssel ellátott hélium-atom (He^{++}), mely egyes radioaktív átalakulásoknál szabadul fel; ide tartozik az egy pozitív töltésű hidrogén-atom

(H^+) a hármas pozitív töltésű litium atom (Li^{+++}), a húsz pozitív töltésű kalcium-atom stb.

Világos, hogy a különbség az elektrondimenziójú és az atomdimenziójú pozitív töltésű részecskék között a mi szempontunkból felette lényeges: ha például azt vizsgáljuk, hogy mi történik, ha igen nagy sebességgel haladó pozitív töltésű részek útjába vékony aranylemezt helyezünk, úgy az atomátmérőjű részecskék nem igen haladnak át az aranyatomokon, melyek nem nagyobb dimenziójúak, mint a támadó részecske, de az könnyen elképzelhető, hogy a tízezerszer kisebb, elektronkiterjedésű, bár atómtömegű elektromos részecskéknek, az α részecskék sikerül az aranyatomokon keresztül futniok.

Ha a következőkben α részecsről szólnak, úgy nem kizárólag kettős pozitív töltésű hélium atomot értünk, de általában elektron kiterjedésű pozitív töltésű atomokat, melyek közül a hélium atomok részünkre a leghozzáférhetőbbek, mivel önként lépnek fel, a rádium, az emanáció stb. átalakulása közben.

Az atomszerkezet vizsgálatának a módszerei közül legelőször azt tárgyaljuk, a mely az α és β részecskék anyagrégeken való keresztül haladásánál tapasztaltakból von következtetéseket. A második módszer annak a megfigyelésén alapszik, hogy milyen következményekkel jár az atomra nézve egy α , illetve β rész leadása. Ez nem kevésbé érdekes, de az előbbinél annyival korlátozottabb módszer, hogy csak az úgynevezett radioaktív atomok α és β részeinek leadása képezheti megfigyelés tárgyát.

Az elemek Röntgen-színképe, az illető elem atomjai által gerjesztett jellegzetes Röntgen-sugárzás képezi a vizsgálatnak egészen új, de igen mélyreható módszerét. A negyedik csoport közvetettebb módszereket ölel fel, melyek a csősugarak fényemissziójának, valamint az illető atomok általános spektrális viselkedésének a vizsgálatán alapulnak.

3. Következtetések, melyeket az α és β részek anyagon való áthaladásából vonhatunk.

Ha α vagy β részek útjába vékony fémlemezt helyezünk, ezeknek egy része a fémlemezen keresztül halad, a másik része elnyeletik, a harmadik része szétszóródik különböző irányokba.

A β részek abszorpcziója exponenciálisan történik és az abszorpcziós állandó megközelítőleg fordítva arányos az illető anyag sűrűségével. A különböző elemeknek α részeket útjukban megállító képessége viszont megközelítőleg fordítva arányos az illető elem atómsúlyának a négyzetgyökével.

E rendszerességek, valamint az egész abszorpcziós folyamat képe alapján valószínű, hogy az α és β részek nem az egyes atomok közötti üres téren át csúsznak végig, de magukon az útjukba helyezett fémek pl. az arany atómjain át haladnak keresztül. Az aranyatomok tehát nem lehetnek anyaggal egyenletesen megtöltött gölyöcskák, de részben egy anyag által áthatolható részből kell állniok. Messzebbmenő felvilágosítást nyerünk az atóm szerkezete felől, ha az anyagon áthaladó α és β részek szétszóródási jelenségét tekintjük.

A szétszóródás nem felületi jelenség, mivel függ a szétszóró réteg vastagságától: az α és β részek többé-kevésbé behatolnak az aranyatomokba, mielőtt szétszóródnának. A nehéz α részek szétszóródása a könnyebben követhető jelenség: ha az α rész ugyanis cinkszulfid ernyőre esik, úgy az utóbbi a beesés helyén felvillan, ezen úgynevezett «scintillatiós» jelenség segítségével minden egyes α rész szóródási szöge pontosan megállapítható. GEIGER és MARSDEN¹ azt a fontos megfigyelést tették, hogy az egyes α részek oly erősen szóródnak szét, hogy látszólag visszaveretnek az útjukba helyezett felületről. 8000 rész közül, melyek egy rádium C-vel bevont felületről kiindultak, egy 90°-nál nagyobb szöggel tért el a beesési iránytól, miközben egy $\frac{1}{1000}$ mm vastagságú aranylemezen kereszt-

¹ Proceedings of the Royal Society A., 82., 495. 1909.

túl haladt. E nagyfontosságú megfigyelésből messzemenő következtetéseket lehet vonni: az α részecske ugyanis töltést hordoz $0,96 \cdot 10^{-9}$ elektrosztatikus egységet, energiája aránylag igen nagy: 10^{-4} erg.; hogy elektromos töltéssel ellátott ily nagy energiájú részecske, az aranyatómokon áthaladva derékszögnél nagyobb szöggel térülhessen el a beesési iránytól, kell hogy az atom belsejében erős intenzitású elektromos tér legyen. Miképen keletkezhet ez erős tér az atom belsejében? Úgy, hogy az egyik nemű elektromosság az atom középpontjában az atoméhoz képest elenyészően kis térre van szorítva, míg a másik nemű elektromosság a központtól messze, tehát az atom felületén foglal helyet. Minden atom központja tehát egyúttal egy elektromos központ, minél közelebb jut az α rész az aranyatom középpontjához, miközben azon áthalad, annál erősebben fog irányából kitérítettetni. Míg a legtöbb α rész messzehaladt ezen elektromos központoktól, miközben az aranylemezen áthalad és így nem, vagy igen kevésbé térül ki útjából, addig egynéhány igen közel fog jutni a központhoz és ennek megfelelőleg erősen ki fog térülni.

E következtetést a fenti kísérletekből RUTHERFORD¹ vonta le, szerinte a θ szög alatt szétszórt részecskék számának arányosnak kell lennie

1. $\text{Cosec}^4 \theta/2$ -lel,
2. t -vel, a réteg vastagságával ha ez kicsiny,
3. $N.e$ -vel a központi töltések számával,
4. fordítva arányosnak $(mu^2)^2$ -el (m egy részecske tömege u a sebessége).

E négy fontos következtetés közül a 1., 2. és 4.-t GEIGER² kísérletei meglepő módon igazolták, így a kísérlet alapján $N.e$ kiszámítható; az eredmény az, hogy N megközelítőleg fele az illető atom súlyát jellemző számnak, tehát az aranyatom esetében körülbelül 100. Később látni fogjuk, hogy egészen

¹ Philosophical Magazine 21., 669. 1911.

² l. az idézett helyen.

más téren végzett kísérletek ugyanezen eredményt szolgáltatták. Itten lép fel legelőször az a teljesen alapvető megismerés, hogy az atómközpont töltéseinek a száma az a tulajdonság, a mely az atóm fizikai és kémiai tulajdonságait elsősorban jellemzi és hogy ez *körülbelül* (!! az atómsúlyt jellemző számnak a fele, tehát nem az atómsúlyt kell tekinteni, ha összefüggést keresünk a különböző elemek tulajdonságai között, de a fenti, az atómsúlylyal arányos számot.

4. Melyik nemű elektromosság foglal helyet az atóm központjában?

Kísérleti alapon jutottunk ahhoz a megismeréshez, hogy az egyik nemű elektromosság az atóméhoz képest elenyésző térre van szorítva az atóm belsejében, míg a másik nemű elektromosság attól messze, t. i. az atóm felületi rétegeiben foglal helyet; azt is tudjuk, hogy a pozitív elektromosság mindig az anyaggal összekötve lép fel, tehát ottan, a hol a pozitív elektromosság van, ott kell egyúttal az atóm anyagi részének is lennie, a kérdés már mostan az, melyik nemű elektromosság van az atóm belsejében? E kérdésre nem lehet egy döntő érveléssel válaszolni, de az érvek egymást kölcsönösen erősítő halmaza egész határozottsággal a mellett szól, hogy az atóm anyagi része és a pozitív elektromosság az, a mely az atómgömb középpontjában foglal helyet és hogy a negatív elektromosság negatív elektronok alakjában az atóm felületi rétegeiben kering, az aranyatóm anyagi része és 100 pozitív töltése pl. az aranyatóm központjában (10^{-12} cm³ átmérőnyi téren) 100 negatív elektrona pedig a 10^{-8} cm átmérőjű aranyatóm felületi rétegeiben kering oly sebességgel, hogy a keringés centrifugális ereje kompenzálja az ellenkező előjelű középpont vonzó erejét.

¹ RUTHERFORDnak újabban nyilvánított nézete szerint ez az átmérő (l. a Philosophical Magazine 1914 márcziusi számát) ennél még lényegesen kisebb.

Az első érv, a mely a fentiek mellett szól a következő: így sokkal érthetőbb lesz az, hogy az α részek, tehát anyagi részek áthatolhatnak atómokon, mert hiszen az α rész nem az arany-atóm anyagi részén halad át, de csak az elektronokból álló védőpánczélon. Másik érv viszont az, hogy sokkal könnyebben megérthetjük a radioaktív átalakulásoknál felszabaduló α részek nagy energiáját, hogy ha azok az atóm központjából indulnak ki. Hogy viszont a negatív elektronok vannak az atóm felületi rétegeiben, az már azért is valószínű, hogy ezen elektrónok ultraibolya fény, vagy egyéb fizikai hatások alatt aránylag igen könnyen szabadulnak fel és távoznak el. Nagyszámú egyéb érvel a továbbiak folyamán fogunk megismerkedni.

Miből áll az atómnak az anyagi része? Egyik főalkatrészét kétségen kívül a hélium képezi, mivel alkalmunk van tapasztalni, hogy az elemek átalakulásának nagy része hélium leadásával jár; valószínű, hogy az atómmag hidrogént is tartalmaz, hogy milyen egyéb elemet, azt egyelőre homály fedi. Az atómmag szerkezetéről vajmi keveset tudunk, csupán hogy kis (kb. 10^{-12} cm átmérőjű) térre van szorítva, hogy bizonyos, az illető atóm tulajdonságait jellemző számú pozitív töltést hordoz, hogy az atómmag hosszabb-rövidebb idő múlva instabilissá lesz, alkatrészeinek egy része kirepül és a mag újból bezáródik. Ez utóbbi folyamat igen különböző idők alatt folyik le, míg pl. a ThC_2 esetében a jelenlévő atómok felével 10^{-11} sec. alatt történik meg az előbb említett folyamat, addig az Urán I. esetében 5×10^9 esztendő és a higany, ólom stb. ú. n. «nem radioaktív» elem esetében még sokkal hosszabb idő alatt megyen végbe az atómok felében ily atómius robbanás.

5. Az elektronok száma és elhelyezése az atómban.

Eddig csak kvalitatív képet nyertünk az atóm belsejéről, kérdés most az, hány elektron van az atómban és hogyan vannak elhelyezve.

Mint ismeretes, lehetséges a színszórás elmélete segítségével

következtetést vonni arra, hogy hány elektron-réteg van az atómban, mert minden test, mely a látható szinkép bármely részében normális diszperziót mutat, kell hogy saját rezgésekkel rendelkezzen az ultraibolya részben és mert ezen rezgésszámok képviselik az elektron rezgéseit az atómban. Ha ismerjük a test diszperzióját, úgy kiszámíthatjuk atómjai elektronjainak a számát és rezgési adatait, így pl. azt kapjuk, hogy a *H molekula* (H_2) 2 elektront tartalmaz, a héliumatóm kettőt, az oxigén 4-t stb.

A diszperziós elmélet azonban azt feltételezi, hogy csak egy saját vibráció létezik az ultraibolya részben, a mi a tényeknek nem felel meg és így azon elektronszám, melyet ezen elmélet a magasabb atómsúlyú elemek esetében szolgáltat a ténylegesnél többnyire kisebb.

★

Az α és β részek sebessége, miközben anyagon áthaladnak csökkenést szenved; az α részek esetében¹

$$V^3 = K \cdot R^2$$

hol V az α részek sebessége és R a hatótávolsága még a β részek esetében

$$V_o^4 - V_x^4 = x$$

hol V_o és V_x az x -nyi réteg befutása előtti, illetve utáni sebességet jelenti.

Miképen jön ez a sebesség változás létre? Az atómban keringő elektronok pályáját meg fogja zavarni a külső behatás, az α vagy β résznek az áthaladása az atómon és annak az összeütközése az elektronokkal, mely az előbbi sebességcsökkenést hozza létre és mely csökkenés tisztán az elektron rezgési számától és a részecske sebességétől fog függeni.

¹ BOHR: Phil. Mag. jan. 1913. p. 23.

De ez a felfogás teljesen a diszperziós elmélet tárgyalási módjára emlékeztet, a mint ott a különböző hullámhosszú fénynél különböző rezgési számok jönnek tekintetbe, úgy itt különböző sebességű részecskéknél különböző ütközési idők, így lesz érthetővé, hogy sikerül két oly látszólag heterogén területet összekapcsolni, mint a diszperziót a szinkép ultraibolya részében és az α és β részek sebességcsökkenését, miközben ezek anyagon haladnak át, az utóbbiból kiszámítani az optikai adatokat és vice versa.

Ha e számítást elvégezzük,¹ azt kapjuk, hogy a hidrogén-atóm 1, a héliumatóm 2, az oxigénatom 8 elektront tartalmaz.

Két független módszer szolgáltat tehát a hidrogénatómban lévő elektronok számául egyet, a héliumatóm elektronjai számául kettőt.

Így lassanként betekintést nyerünk az atom quantitativ szerkezetébe is.

Az általános probléma megoldását azonban, t. i., mi a stabilitási feltétele egy oly atómnak, mely egy központi pozitív töltésű magtól és a körül gyűrűkben keringő elektronokból áll mindeddig nem érintettük volt. Ez nem régen sikerült NILS BOHR-nak, kinek elmélete megadta a fenti probléma megoldását, ismereteinket úgy az atóмок, mint az energiasugárzás elméletét illetőleg sokkal mélyebb alapokra helyezte és megadta egyszerű és termékeny magyarázatát számos eddig meg nem magyarázott fizikai és kémiai jelenségnek.

6. Bohr elmélete.

Ha kiindulunk RUTHERFORD fenti atómképéből és felvetjük a kérdést, hogy milyen elektron-csoportosulás mellett stabilis az ilyen atom, erre a kérdésre nem válaszolhatunk a nélkül, hogy egy újabb elvet, egy hipotézist ne alkalmazzunk. A fizika milyen terén keressük e hipotézist? Vajjon a klasszikus elektrodinamika

¹ GEIGER : Proc. Roy. Soc. A. 133., 505. (1910.)



felé fordítsuk figyelmünket? Ez az utóbbi esztendők tapasztalatai szerint nem látszik reményteljesnek: mint ismeretes ugyanis a klasszikus elektrodinamika felmondja a szolgálatot atóm dimenziójú rendszerek viselkedésének a tanulmányozásánál, melyeknek a magyarázata egy új, a klasszikus elektrodinamikán kívül álló elv, az ú. n. quantumelmélet bevezetését igényli.¹ Ez utóbbi szerint — melyet, mivel tárgyunkkal szoros összefügg, a következőkben röviden jellemezünk — atómdimenziójú rendszerek nem emittálhatnak tetszőleges energiámennyiséget, de mindig egy bizonyos minimális energiámennyiséget, $h \cdot \nu$ -t vagy annak egész számú többszörösét, a hol ν az illető rendszer rezgésszámát jelenti, h pedig egy univerzális állandó, az akció elemi mennyisége.

A hősugárzás főproblémájának a tanulmányozása vezetett először a fenti elvhez, annak a tanulmányozása, hogy az abszolút fekete test energiája miképen oszlik meg az egyes spektrumrészek között, hogy az energiának milyen része esik az ibolya, kék, vörös stb. spektrumrészekre. A klasszikus elektrodinamika e kérdésre oly választ adott, mely a kísérleti tapasztalatokkal ellenmondásban volt, míg PLANCK az ő quantum-hipotézise alapján a kísérletekkel megegyező eredményre jutott.

Ha a fizika más fejezetei felé fordítjuk figyelmünket, ugyancsak észlelünk jelenségeket, melyeket a quantumelmélet segítségével sikerül megmagyarázni, míg a klasszikus mechanika csütörtököt mond. A DULONG- és PETIT-féle törvénytől való eltérések, továbbá az alacsony hőmérsékleten tapasztalt azon érdekes jelenség, hogy az elemek fajhője zérus felé közeledik csökkenő hőmérsékletnél, hogy a gyémánt fajhője már 80 absz. fokon zérustól alig különbözik, hogy a kétatómos hidrogén atómhője 50° absz.-nál azonos az egyatómos gázak atómhőjével, 3-al, mind a quantumelmélet segítségével megmagyarázható tények.

Várható ezek után, hogy az atómszerkezet és a quantum-

¹ PLANCK: Ann. d. Phys. 31., 758. (1910.), 37., 842. (1912.)

elmélet között közeli összefüggésnek kell fennállania, hogy az atómban keresendő az a mechanizmus, a mely az energiának adagokban való leadását közvetíti. NICHOLSON¹ és NILS BOHR² igen szerencsés intuícióval találták meg ezen összefüggést: szerintünk az akció elemi mennyisége h illetve $\frac{h}{2\pi}$ nem más, mint az atómban keringő elektron szögmomentuma (tömeg \times felületi sebesség); ez utóbbi mindig egyenlő $\frac{h}{2\pi}$ -vel, vagy annak egész számú többszörösével.

E hipotézisnek, melyet először NICHOLSON állított fel és melyet BOHR elmélete alapjául vett, helyességét BOHR elméletének sikerein kívül bizonyítják MOSELEY később megbeszélendő kísérletei.

7. Miképen magyarázta Bohr a vonal-spektrum létrejövetelét?

BOHR atómképébe legkönnyebben úgy pillanthatunk be, ha a fenti kérdésre válaszolunk.

Induljunk ki a legegyszerűbb atómból, mely áll egy pozitív töltést hordozó középponti magból és egy a körül keringő elektronból. Tételezzük fel először, hogy e rendszer nem sugároz ki energiát, ebben az esetben az elektron állandóan ellipsziseket fog leírni. A keringések száma ω és az ellipszis nagy tengelye $2a$ függvénye lesz annak az energiamennyiségnek W -nek, melyet a rendszerrel közölnünk kell, hogy az elektront kivonjuk a pozitív atómmag elektromos hatása alól. Ha $-e$ és E az elektron, illetve az atómmag töltése és m az elektron tömege, úgy az elemi mechanika alapján:

$$\omega = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \cdot \frac{W^{\frac{3}{2}}}{eE\sqrt{m}}, \quad 2a = \frac{eE}{W} \quad (1)$$

W , mint könnyen kimutatható, egyúttal egyenlő az elektron egy fordulatra vonatkoztatott átlagos mozgási energiájával.

¹ Month. Not. Roy. Ast. Soc. 122., 139., 677., 693., 729. (1912.)

² Phil. Mag. Jul. Sept. Nov. 1913.

Csak ha ismeretes W értéke, vannak meghatározva ω és a .

Vegyük már mostan tekintetbe az energiakisugárzás hatását, ekkor az elektron nem fog többé állandó pályát leírni, W mindig növekedni fog, az elektron mindig közelebb és közelebb fog az atómközponthoz jutni, folyton kisebb pályát írva le, ez mindaddig folytatódna, míg az atóm dimenziója egyenlő lenne az atómmag dimenziójával, vagyis az atóm elektrondimenziójú lenne; világos, hogy az ily módon kisugárzott energiának hasonlíthatatlanul nagyobbna kellene lennie annál, a mely a rendes molekuláris energia kisugárzásnál lép fel és még nagyobbna, mint a mely radioaktív átalakulásoknál mutatkozik, melyek csak egy lépcsőjét mutatják ennek az itt leírt atóm-összeesésnek.

A fenti kép, a mi nem más, mint a klasszikus elektrodinamika alkalmazása arra az esetre, hogy az atómban keringő elektron egy helyzetből a másikba jut, nem felel meg a tényeknek, mert hiszen ha valamely molekuláris folyamatnál bizonyos, az illető rendszerre jellemző energiamennyiség sugározott ki, az atóm újból stabilis helyzetet foglal el és a részecskék ugyanolyan nagyságúak maradnak, mint a kisugárzás előtt.

Ha most figyelmünket a quantumelmélet felé fordítjuk, úgy azt látjuk, hogy az utóbbi szerint atómdimenziójú rendszerek nem sugároznak ki folytonos módon energiát, miképen azt a klasszikus elektrodinamika feltételezi, de ez véges adagokban történik, olyképen, hogy egy ν rezgésszámú vibrátor $\tau h \nu$ energiamennyiséget emittál, hol h egy állandót jelent és τ egész számot.

Ekkor az atóm keletkezésénél egy középső magból és egy elektronból $\tau h \nu$ energiamennyiség sugározódik ki, hol ν a kibocsátott sugárzás rezgésszáma és egyúttal fele a stacionárius helyzetben keringő elektron keringési számának: ω -nak. Ez utóbbi azon feltevést tartalmazza, hogy a kisugárzás homogén, mivel az elektron keringési száma az emisszió kezdetekor — mikor az elektron kezdett az atómmag hatáskörébe jutni — zérus volt, a sugárzás befejezésekor pedig ω , a sugárzásról e

szerint fölteszszük, hogy az átlagos keringésszámmal egyenlő frekvenciával történik.

$$W = \tau h \frac{\omega}{2} \quad (2)$$

Ha ezt behelyettesítjük (1) be úgy:

$$W = \frac{2\pi^2 m e^2 E^2}{\tau^2 h^2}, \quad \omega = \frac{4\tau^2 m e^2 E^2}{\tau^3 h^3},$$

$$2a = \frac{\tau^2 h^2}{2\pi^2 m e E} \quad (3)$$

Ezen egyenletek csupa ismert adatot tartalmaznak és τ -t, mely egész számot jelent és így sikerül — ha τ ismert értékre szorítható — az atomban mozgó elektron kinetikai energiáját, fordulati számát és távolságát az atomközponthoz, számokban kifejezni.

Tekintsük a legegyszerűbb esetet, midőn $\tau = 1$, $E = e$, ekkor

$$e = 4,7 \cdot 10^{-10}, \frac{e}{m} = 5,31 \cdot 10^{17}, h = 6,5 \cdot 10^{-27} \text{ lévén,}$$

$$2a = 1,1 \cdot 10^{-8} \text{ cm, } \omega = 6,2 \cdot 10^{15}, \frac{W}{e} = 13 \text{ volt,}$$

mely számok tényleg ugyanolyan nagyságrendűek, mint az atomok lineáris dimenziói, az optikából ismert rezgési számok és az úgynevezett ionizációs potenciálja a gázoknak.

БОHR szerint az atomrendszernek több stacionárius helyzete lehet, vagyis az elektronok különböző meghatározott körpályákon mozoghatnak, noha van egy helyzet, mely a legállandóbb, az, melynek a legnagyobb energiaemisszió, W felel meg; míg a rendszer dinamikai egyensúlya az állandó helyzetek egyikében tárgyalható a klasszikus elektrodinamika alapján, addig az átmenet egy stacionárius helyzetből a másikba nem; ez utóbbit mindig egy homogén sugárzás kibocsátása kíséri, melynek energiataralma és rezgési száma közötti összefüggést PLANCK ismert elmélete szolgáltatja.

A vonal-spektrum egyes vonalai úgy jönnek létre, hogy az

atómban keringő elektronok egyik stacionárius helyzetből átmennek egy másikba, miközben az illető spektrális vonal energiája bocsáttatik ki.

Ha ezen felfogás helyes, úgy kell, hogy a hidrogénvonal szinképét kiszámíthassuk. A hidrogénatóm megfelel a fent megbeszélte ideális atómnak, egy központi töltése van a magjának és egy elektron kering benne. Az utóbbit már a diszperziós elméletből és az α és β részek sebességsökkenéséből tudjuk, miközben azok hidrogéne áthaladnak.

A hidrogén spektrum-vonalait BALMERNAK sikerült rendszerbe foglalnia.

$$\nu_n = A \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

BALMER ismert képletében, ν az illető vonal rezgési száma, n egész számot jelent és A a képlet állandója, melynek kísérletileg meghatározott értéke $3,290 \cdot 10^{15}$.

A hidrogénatóm képződésénél emittált összenergia (3) képlet szerint

$$W_\tau = \frac{2\pi^2 m e^4}{h^2 \tau^2}$$

azon energia viszont, mely akkor emittálódik, miközben a rendszer $\tau = \tau_1$ -nek megfelelő helyzetből, $\tau = \tau_2$ -nek megfelelő rendszerbe megy át e szerint

$$W_{\tau_2} - W_{\tau_1} = \frac{2\pi^2 m e^4}{h^2} \left(\frac{1}{\tau_2^2} - \frac{1}{\tau_1^2} \right)$$

de ez BOHR szerint nem más, mint energiája annak a homogén sugározásnak, mely az illető spektrum-vonalnak felel meg és melyről továbbá tudjuk, hogy

$$W_{\tau_2} - W_{\tau_1} = h\nu$$

ebből

$$\nu = \frac{2\pi^2 m e^4}{h^3} \left(\frac{1}{\tau_2^2} - \frac{1}{\tau_1^2} \right) \quad (4)$$

Ha a (4) képletbe $\tau_2 = 2$ -t helyezünk és τ_1 helyébe fokozatosan egész számokat, úgy a képlet azonos lesz BALMER fenti képle-

tével. Ha $\tau_2 = 3$ -t helyezünk, úgy a PASCHEN észlelte ultravörös szeriest kapjuk, ha $\tau_2 = 1$ t, úgy ultraibolya spektrumot kapunk, melynek létezése még nem ismeretes, de BOHR szerint várható.

Számítsuk most ki a

$$\nu = \frac{2\pi^2 m e^4}{h^3} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{\tau_1^2} \right)$$

képletben a zárójel előtt álló tagot, melynek ha az elmélet helyes, egyenlőnek kellene lennie BALMER A állandójával.

$$e = 4,78 \cdot 10^{-10}, \quad \frac{e}{m} = 5,31 \cdot 10^{17}, \quad \frac{e}{h} = 7,27 \cdot 10^{16}$$

$$A = \frac{2\pi^2 m e^4}{h^3} = 3,26 \cdot 10^{15}$$

tehát csak 1%-al különbözik a kísérletileg talált értéktől, $3,29 \cdot 10^{15}$ -től, a mely eredmény BOHR elméletének igen szép gyümölcse.

A hidrogén-atóm átmérője tehát változásoknak vethető alá, és annak, hogy a hidrogén-atóm a BALMER-sorozatot emittálja, előfeltétele, hogy a spektrál csőben végbemenő külső behatás eredményeképpen a hidrogén-atóm kitáguljon, hogy az elektron messzebb távozzék az atómközponttól, mint a milyen távolságban van a normális, vagyis nem emittáló hidrogén-atómban. A körpálya, melyet az emittáló hidrogén-atóm elektronja befut, azért mégsem tetszőleges; az elektron csakis bizonyos előírt pályákon mozoghat, melyeket ugrásszerűen foglal el és mely ugrásnak a nagyságát a PLANCK-féle h szabja meg. E lehetséges pályák sugarát jelöljük a_2, \dots, a_n -nel, a_0 -sal pedig a nem emittáló hidrogén-atómban keringő elektron pályáját. Az a_0 tehát az állandó hidrogén-atóm sugara. Ekkor világos, hogy az első BALMER-vonal emissziója fog legkönnyebben történni, hiszen arra, hogy az elektron a_1 átmérőjű pályáján keringjen, aránylag a legkisebb energiamennyiséget kell az atómmal közölnünk. A tizedik BALMER-vonal előállítására már jóval nehezebb lesz, a_{12} pl.

már egyenlő lesz $1, 6 \cdot 10^{-6}$ cm-el, tehát 30-szor nagyobb, mint a_0 , a hidrogén-atóm átmérője, a 33-ik BALMER-vonalat csak akkor fogja a hidrogén-atóm mutatni, ha elektronját sikerült a_{33} helyzetbe hozni, vagyis egy oly gömb felületére kényszeríteni, melynek átmérője $1, 2 \cdot 10^{-5}$ cm.

Az égi testek szinképében 33 BALMER-vonal lép fel, míg laboratóriumban nem sikerül többet mint 12 vonalat előállítani, ennek BOHR elmélete egyszerű magyarázatát adja. Nem is lehet elvárni, hogy a laboratóriumban előállíthassuk a 33-ik BALMER-vonalat, hiszen ennek az előfeltétele, hogy a hidrogén-atóm elektronja $1, 2 \cdot 10^{-5}$ cm-nyire távozzék el az atómmagtól, tehát annyira, a mennyi a molekulák közepes távolsága 0.02 mm higanynyomásnál. Csak igen alacsony gáznyomás mellett léphet fel ezek szerint a hidrogén-szinkép ezen része; hogy ezen kis sűrűség dacára elegendő gáz legyen jelen, szükséges, hogy óriási tér legyen az alacsony nyomású hidrogénnel megtöltve, a mi laboratóriumban nem állítható elő. Lehetségesnek látszik azonban a fentieknek megfelelő abszorpciós vonalak a hidrogénszinképben megfigyelni.

Az emissziós szinkép akkor jön létre, midőn a keringő elektron a másodikból (τ_2), a harmadikba (τ_3), a harmadikból a negyedikbe (τ_4) stb. megy át, viszont az abszorpciós szinkép akkor, midőn a fordított folyamat történik.

Miért nem abszorbeál a hidrogén-gáz közönséges hőmérsékleten olyan hullámhosszú fényt, melyet vonal-szinképe tartalmaz és a melyet magas hőmérsékleten valóban el is nyel? Azért, mert közönséges hőmérsékleten a hidrogén-atóm $\tau = 1$ helyzetben van, abszorpció pedig csak akkor áll be, ha a rendszer $\tau = 2$ helyzetbe megy át egy magasabba.

A BOHR-féle atóm-modell alapján a hidrogén vonalszinképének keletkezését meglepő egyszerűséggel és hűséggel lehetett megmagyarázni, BOHR elmélete tehát feltétlenül megérdemli, hogy komolyan foglalkozzunk vele. Egy későbbi közleményemben ennek megfelelően BOHR elméletének egyéb eredményeit fogom ismertetni.

Hevesy György.

PHYSIKAI SZEMLE.

Fémek termoelektromos viselkedése mély hőmérsékleteken; G. WIETZEL től.¹

Különböző fémek termoelektromos viselkedését a szerző mindig ólomra, mint normálfémre vonatkoztatta. A kísérletek ólomból és egy más fém-ből összeforrasztott termoelemek elektromotoros erejének meghatározását czélozták; az elektromotoros erő meghatározása kompenzációs eljárással történt. A termoelemek egyik forrasztási helye állandóan jég olvadás-pontján, vagyis 273·09 abszolút hőfokon volt, a másik forrasztási hely hőmérséklete a különböző kísérletekben 273 és 14 absz. hőfokok közt változott. Ez utóbbi forrasztási helyet egy fűtőtekeres vette körül s ezzel együtt merült folyós levegőbe, illetőleg folyós hidrogénbe. A fűtőtekeres áramának szabályozásával a folyós levegő, ill. hidrogén hűtőhatása tetszés szerint módosítható volt s ez által lehetséges volt az absz. skálán mért 14°-tól 273°-ig terjedő hőmérsékleti közön belül akármilyen hőfokot állandóan fenntartani. Az erősen hűtött forrasztási hely hőmérsékletét platinahőmérővel határozta meg. A hőmérőül használt platinatekeres WHEATSTONE-hídban mért ellenállása szolgált a hőmérséklet mértékéül. A fűtőtekeres áramának finom szabályozásával a WHEATSTONE-híd galvanometerét állandóan kitérítetlen állapotban lehetett tartani, miáltal a hidegebb forrasztási hely hőmérsékletének nagyfokú állandósága volt biztosítható; egy mérés tartama alatt fellépő hőmérsékletingadozások mindig 0·02° C.-nál kisebbek voltak. A mérésekből mély hőmérsékletekre adódó termoelektromos feszültségi sorozat szélső helyein és pedig a pozitív oldalon vas, a negatív oldalon konstantán állottak. Vas-ólom termoelem elektromotoros ereje a forrasztási helyek 20·4, ill. 273·09°-nyi absz. hőmérsékete mellett 3600 mikrovolt (10^{-6} Volt), ólom-konstantán termoelemé pedig a forrasztási helyek ugyanolyan hőmérsékleténél 5600 mikrovolt. Összehasonlításképen még megemlítyük, hogy a vas-konstantáns elem, mely

¹ Ann. d. Phys. (4.) 43. 605. l. (1914.)

e szerint 273·09 és 20·4 absz. között 9200 mikrovoltot ad, 100° és 0° C. között 5300 mikrovolti elektromotoros erőt szolgáltat. A kísérletek alapján meg lehetett még állapítani, hogy 1. ugyanazon fém különböző módosulatainál ugyanegy karakterű E és $\frac{dE}{dT}$ görbék adódnak (E a termoelektromotoros erőt, T az absz. hőmérsékletet jelenti); 2. az elektromotoros erő hőmérséklettel való változása, vagyis a $\frac{dE}{dT}$ hányados a legtöbb fémnél zérus felé konvergál, a mint a hőfok az abszolút nullához közeledik, tehát:

$$\lim_{T=0} \left(\frac{dE}{dT} \right) = 0.$$

Ez utóbbi kísérleti tény összhangzásban van a NERNST-féle termodinamikai tétellel. NERNST tételéből u. i. — mely szerint az absz. nulla-pont közelében kondenzált állapotban levő rendszerek entrópiája zérus — szintén a $\frac{dE}{dT}$ hányadosnak absz. nulla-fokon való eltűnése következik.

Bartonicsek Emil.

A Röntgen-sugarak reflexiójáról és spektrumáról.

Visszaverődési jelenségeket Röntgen-sugaraknál először BRAGA figyelt meg. Később e jelenséget DAINOIN és MOSELEY, DE BROGLIE¹ és HERWEG,² a R.-sugarak *spektrumának* előállítására használták fel. A jelenség maga a következő: ha egy kristály hasadási síkjára R.-sugaraknak egy keskeny nyalábja esik, úgy a beesési szögek bizonyos kitüntetett értékei mellett szabályosan reflektált sugarakat lehet megfigyelni, míg ugyanazon kristályfelületre más, az előzőektől eltérő szögek alatt beeső sugarak egyáltalában nem reflektálódnak. Különösen erősen reflektált sugarakat fluoreszkáló ernyő segítségével is meg lehet találni, rendszeren azonban csak fotografikus úton győződhetünk meg jelenlétükről. A kitüntetett irányok, melyekkel párhuzamosan haladó R.-sugarak a kristályfelületen reflexiót szenvednek a reflektáló hasadási sík normálisával nagy, majdnem 90°-nyi szöget zárnak be; BRAGG szerint a φ szögek eleget tesznek a:

$$\cos \varphi = h \frac{\lambda}{2d}$$

¹ Comptes rendus, Paris, 1913 november 17, december 22, 1914 január 19 és február 2.

² Verh. d. deutsch. Phys. Ges. 16. 73. 1. (1914.)

összefüggésnek, hol h egy pozitív egész szám, δ a térrácsszerkezetűnek képzelt kristályban a reflektáló hasadási felülethez párhuzamos rács-síkok kölcsönös távolsága, λ pedig a reflektált sugarak hullámhossza.

Az 1) képlet tulajdonképpen nem egyéb, mint az optikai rácsoknál jól ismert fényelhajlási képlet: ha ϕ az a szög, a melyet az üvegrácsra merőlegesen beeső fénysugár egy elhajlási maximum irányával bezár, akkor:

$$h\lambda = \delta \cdot \sin \phi.$$

A R.-sugár esetében a beeső és reflektált sugár által bezárt szög:

$$\phi = 2 \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) =$$

mivel ϕ kicsiny

$$\cos \frac{\phi}{2} = 1$$

és

$$\sin \phi = 2 \cdot \sin \frac{\phi}{2} = 2 \cos \varphi$$

és

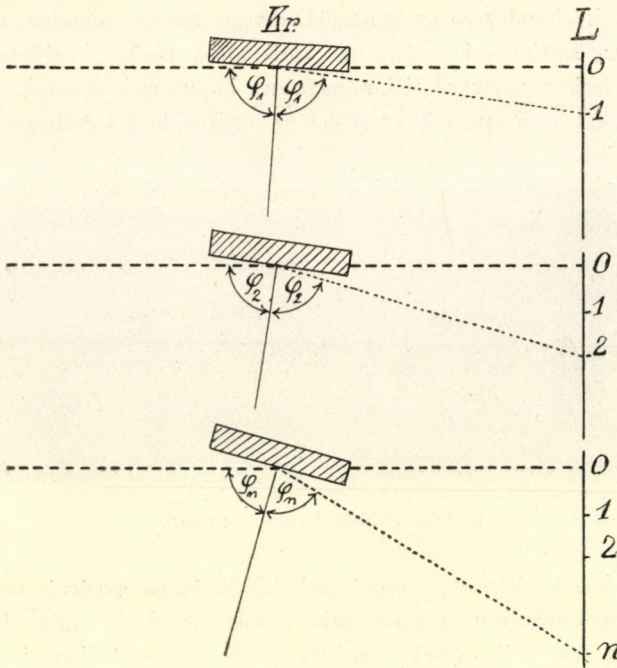
$$h\lambda = 2\delta \cos \varphi.$$

E formula szerint adott hullámhosszúságú sugár különböző szögek egész sorozata alatt reflektálódhatnak (a h különböző egész számú értékeinek megfelelően), e φ értékek közül azonban csak a $h = 1$ helyettesítéssel adódó, tehát a:

$$\cos \varphi = \frac{\lambda}{2\delta} \quad (2)$$

formulából számított jön tekintetbe, a többi h érték mellett fellépő reflektált sugár ugyanis igen gyöngye, sőt legtöbb esetben meg sem figyelhető. Ily módon minden φ beesési szög mellett egyetlen λ hullámhosszúságú sugár szenvedhet reflexiót és reflektált sugár tényleg mutatkozni fog, ha a kérdéses λ hullámhossz a beeső sugárnyaláiban előfordul. A mondottakban már bennfoglaltatik a R.-sugarak reflexió útján való spektrális szétbontásainak alapgondolata. DE BROGLIE és HERWEG kísérleteinél az alkalmas rések által elhatárolt R.-sugárnyaláb útjába helyezett kristálylemez a beeső sugarak irányára és a reflektáló hasadási felület nomálisára merőleges tengely körül bizonyos szögtartományon belül ide-oda történő lassú forgó mozgást végzett. A forgó mozgás szögsebessége DE BROGLIE kísérleteinél óránkénti 13° , a maximális szögelfordulás pedig kb. 15° volt. Ily berendezés mellett a kristálylemez forgása közben a

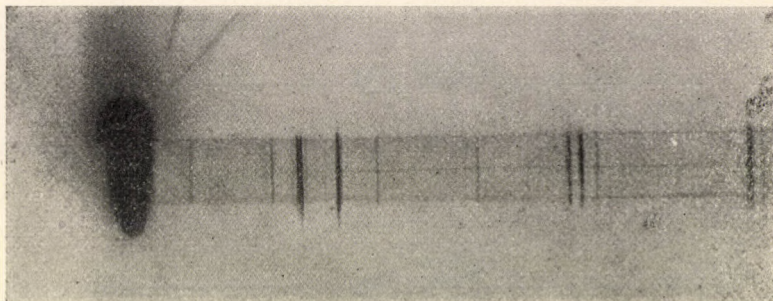
R.-sugarak beesési szöge bizonyos értékek közt folytonosan változik. Feltéve, hogy a beeső sugárban $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n$ hullámhosszúságú rezgések fordulnak elő, intenzívebb reflektált sugár akkor jelenik meg, midőn a beesési szög a hullámhosszak fönti sorozatából a 2) képlet alapján számított $\varphi_1, \varphi_2 \dots \varphi_n$ értékek valamelyikét éri el. A különböző szögek alatt reflektált sugarak útjába fotografikus lemezt helyezve, a kristály



1. ábra.

ide-oda mozgásának kellő számú megismétlése után azon a $\varphi_1, \varphi_2 \dots \varphi_n$ értékeknek megfelelő helyeken fekete csíkok jelentkeznek. Az 1. ábrán egymásután elő vannak tüntetve a kristálylap (Kr.), a beeső, ill. visszavert sugarak iránya (szaggatott, ill. pontozott vonallal) azon pillanatokban, midőn a kristály forgása közben a primér R.-sugarak beesési szöge φ_1, φ_2 ill. φ_n értékeken halad keresztül. 0 a primér sugarak, 1, 2 és n pedig a φ_1, φ_2 , ill. φ_n szögek alatt reflektált sugarak által L fotografikus lemezen előidézett csíkok helyét jelöli. A nyert spektrogrammok mindegyikén több csík mutatkozik; különösen élesek e csíkok DE BROGLIE

felvételein (melyek közül egyet a 2. ábrán mutatunk be), valószínűen azért, mert kísérleteinél a sugarak a R.-csőből kis lithiumüveg-ablakon jöttek ki s ebben csak igen kis mértékű abszorpciót szenvedtek. Platina-, wolfram- és rézantikatódokról kiinduló sugárzásokról felvett spektrogrammjai mindegyikén, közel a beeső sugarak átütési helyéhez, tehát a spektrum rövid hullámhosszaknak megfelelő oldalán (0 hely az 1. ábrán) két szélesebb sáv látható s ezeken túl az éles csíkok egy egész sorozata; ez utóbbiak elrendezése az antikatód anyaga szerint némileg változik. DE BROGLIE szerint a két sávot az antikatódra repülő katódrészecskék megfékezésakor keletkező elektromágneses impulzusok okozzák, míg az éles csíkokat azon sugarak, melyeket az antikatódnak katódsugarak által



2. ábra. Röntgensugár-szinkép.

rezgésbe hozott elektronjai bocsátanak ki. Az összes sugárzás első része (mely a spektrogrammon a szélesebb sávokat idézi elő) igen áthatoló, a második rész a R.-csövek üvegfalán csak kis mértékben képes áthatolni és a rendszeren használt csövek sugárzásából úgyszólván teljesen hiányzik.

A R.-sugarak reflexiója és interferenciája közt tulajdonképen nincs lényeges különbség; a reflexió is az illető kísérletekben adott körülmények közt létesülő interferenziajelenség. S az előzőekben ismertetett reflexiótörvények csak a jelenség formailag helyes leírását adják. Hogy azonban e leírás teljes legyen, nemcsak egyetlen hasadási felület, hanem a kristály belsejében lehetséges összes rácssíkok által reflektált sugarakat is tekintetbe kell venni. Az előzőekben leírt spektrumok a kristálylemez tényleges hasadási felületén történt reflexiótól származnak, ezen primér spektrumok vonalain kívül azonban a fotogrammonokon egymás közt pár-

huzamos vonalaknak még néhány sorozata figyelhető meg; ez utóbbi vonalsorozatok keletkeztek különböző, a tényleges hasadási felülethez más-más szögek alatt hajló rácssíkokon szenvedett reflexiók által.

Bartoniek Emil.

Az elektromágneses hullámok hatásköréről. SCHMIDT K. E. F. Phys. Zeitschrift. 15. évfolyam. 202 oldal. 1914.

Szerző legelőször is szól mindazokról a tapasztalatokról, melyeket az elektromágneses hullámok hatási körének nagyságára vonatkozólag eddig szereztek. A probléma a következő: a feladó állomásról adott hullámhosszúsággal kisugárzott energiának hány százaléka érkezik meg az adott távolságban lévő felvevő állomásra? Különböző észlelők idevonatkozó tapasztalatai nagyon szétágazók, nehezen hasonlíthatók össze és egymásnak részben ellenmondanak.

MARCONI 1902-ben, majd három évvel később ismételtén tapasztalta, hogy az éjszakai órákban sokkal több energia jut el a felvevő állomásra különben azonos viszonyok mellett, mint nappal, hacsak a feladó és felvevő állomás közti távolság egy bizonyos alsó határértéknél (kb. 250 km) nagyobb. Az éjszaka átvitt energia úgy viszonylott a nappalihoz, mint 5 : 2. A mérési eljárások tökéletesülése folytán szerzőnek legutóbb már 3·5 km távolságra sikerült ugyanezt a jelenséget észlelnie és ugyancsak tapasztalta ezt Norddeich és saját halle-cröllwitzi állomása közötti energiaátvitelnél is. Más kísérletek, melyeket MOSLER, azután a «Gesellschaft für drahtlose Telegraphie» és 1911-ben ismét MARCONI Clifden és Glace-Bay között végzett, mutatták, hogy az energiát átvivő elektromágneses hullámok hosszúsága szintén lényegesen befolyásolja a felvevő állomásra érkező energia mennyiségét. Ez utóbbi kísérletei folyamán MARCONI, ellentétben régebbi méréseivel, részben jobb energia-átvitelt kapott nappal, mint éjjel. A «Gesellschaft für drahtlose Telegraphie» a holland-indiai gyarmatokon két, egymástól DDNy—ÉÉK irányban 900 km távolságban lévő állomás között kísérletezett. Az átvitt energia mennyisége azonos körülmények között más volt a szerint, hogy a hullámok DDNy—ÉÉK vagy pedig az ellenkező irányban tették meg az utat.

A különböző kísérleti eredmények áttekinthetőségét nagyban gátolja az a körülmény, hogy a különböző észlelők más és más, részben szubjektív eljárásokkal mérték az átvitt energia mennyiségét, objektív mérési eljárásoknál is különböző rendszerű detektorokat használtak és azok adatainak állandóságát a legtrikább esetben ellenőrizték.

A kérdés tisztázására szerző nagyszabású és rendszeres kísérleti munkálatok szervezését tartja szükségesnek és programjukat ki is dolgozta, valamint megteremtette az alapot is ezen munkálatokhoz, a mennyiben a vezetése alatt álló halle-cröllwitzi állomáson megbízható, objektív eljárásokat dolgoztatott ki az átvitt energia mérésére.

A program szerint a kísérletekhez szükséges: 1) egy feladó állomás, mely elegendő energiát sugároz ki, hogy még legalább 2000 km távolban objektíve mérhető hatások létesüljenek; 2) egy normál felvevő állomás kb. 10 km távolságban a feladótól és 3) a felvevő állomásoknak egy hálózata oly módon, hogy a feladó állomástól mind a négy világtáj irányában haladva, lenne négy-négy állomás 500, 1000, 1500 és 2000 km távolságban.

Ami a feladó állomást illeti, melynek méreteire vonatkozólag kb. a norddeichi állomás lenne irányadó, elsősorban szükséges, hogy a kisugárzott energiát *kellő* intenzitással és *állandó* intenzitással sugározza ki, mely követelményeknek a norddeichi állomás ugyancsak eleget tesz, mint azt a szerző állomásán végzett mérések igazolják. A kisugárzott energia mennyiségének állandó ellenőrzésére szükséges a normál-állomás. Ily kis távolságra egyrészt a légköri befolyások még elhanyagolhatók, másrészt a megérkező energia mennyisége is még elég nagy arra, hogy termoelemmel, tehát abszolút értékében mérhető legyen. Ennek az állomásnak az adataira mint egységre kell azután vonatkoztatni a többi állomás adatait.

A felvevő állomásokat ernyő-antennával kívánja szerző ellátni, mert ily antennáknál a minimumra van redukálva a földfelszín befolyása az antenna állandóira. Ugyanily célból ú. n. ellensúlyoknak, az antennával összeköttetésben levő tetemes kiterjedésű dróthálóknak alkalmazását is ajánlja, melyeket kb. 4 m magasságban a földfelszín felett kellene kifejésíteni. A mi a felvevő állomások apparaturáját illeti, Halle-Cröllwitzben az indikátorok érzékenysége vonatkozólag termoelemmel, barretterrel és különböző kontaktus-detektorokkal végzett kísérletek azt mutatták, hogy legnagyobb érzékenységgel a kontaktus-detektorok bírnak, a mi viszont az adatok állandóságát illeti, a barretter áll első helyen. Két barretter összehasonlítása mutatta, hogy a kettő segítségével lemerített sugárzó energia viszonya négy napon keresztül maximum 0.4 százalékkal ingadozott. A felvevő állomás kettősen induktíve kapcsolt rendszerrel bírna; az eszközök kis faházikóban lennének elhelyezendők, melyben egy körtalapzaton foglalna helyett a galvanometer és a talapzat belsejében, a föld alatt, a hőmérséklet ingadozásai ellen védve az indikátor (barretter).

A kérdés fontosságát belátva, az «Akadémiák Szövetsége» a «Légköri elektromos jelenségek vizsgálatára kiküldött bizottság» munkaprogramjába ezt a kérdést is felvette és megbízta szerzót, hogy tegye meg a további lépéseket ez ügyben, nevezetesen, hogy egy nagy drótnélküli táviró-állomást igyekezzen a tervnek megnyerni. A nagy német állomások nagy elfoglaltságukra való tekintettel nem vállalhatták a feladatot. Azonban az 1912 októberében Párisban tartott *Conférence Internationale de l'Heure* alkalmából szerzőnek sikerült a brüsseli dr. GOLDSCHMIDT RÓBERT úrnál a kérdés iránt érdeklődést kelteni, ki nemcsak az általa épített nagy brüssel-lackeni állomást állította az ügy szolgálatába, hanem az előmunkálatok céljaira nagyobb összeget is szerző rendelkezésére bocsátott.

Pogány Béla.

A. Einstein: A fotokémiai aequivalens egy törvényének termodinamikai levezetése. (Journal de Physique. 1913. 277 l.)

Fotokémiai aequivalens alatt azon energiamennyiséget értjük, melyet egy, a sugárzás hatására kémiailag reagáló vegyület elnyel, miközben a vegyületnek egy gramm-molekula mennyisége kémiailag átalakul; e mellett azonban fel kell tennünk, hogy termikus abszorpció nincs és a keletkezett vegyületek mennyisége az eredetiéhez képest oly csekély, hogy a kémiai visszaalakulás elhanyagolható. A kémiai átalakulás lehet az egyes molekulák széthomlása vagy kapcsolódása, vagy esetleg e kettőnek valamilyen kombinációja. A reakcióhoz szükséges energiát a vegyület azonban nem mindig a sugárzásból veszi; a sugárzás gyakran csak kiváltja a reakciót, azaz mint katalizátor szerepel.

Olyan esetre, mikor a vegyület egy molekulája a sugárzás hatása alatt két részre bomlik, és e hatás nem katalitikus jellegű, a quantumhipotézis¹ segítségével levezethető, hogy egy molekula a széthomlásnál « $h\nu$ »

¹ A quantumhipotézis a modern fizikában nagy szerepet játszó és számos oldalról megerősített feltevés, a mely szerint a sugárzást kibocsátó és elnyelő legkisebb részecskének legalább az emissziója (esetleg az abszorpciója is) nem történik folytonos módon, hanem ugrásszerűleg egyes energiaadagokban, vagy ezek egészszámú többszöröseiben. A « ν » rezgésszámú sugárzást kibocsátó részecskénél ez az energiaadag « $h\nu$ » (« h » egy univerzális állandó; értéke: $6.55 \cdot 10^{-27}$ erg. sec.).

mennyiségű energiát abszorbeál, ha « ν » a ható egyszínű sugárzás rezgésszáma.

A szerző levezeti ezt a tételt egy gázra a quantumhipotézis igénybevétele nélkül, tisztán a klasszikus termodinamika és a következő igen plauzibilis feltevések segítségével.

1. A T hőmérsékletű gáz, mely egy T' hőmérsékletű fekete sugárzással együtt egy tökéletesen reflektáló falú üregbe van zárva, csakis egy « ν » és « $\nu + d\nu$ » jellemzőkkel bíró sugárnemre képes kémiaiilag reagálni, még pedig úgy, hogy a gáz egy molekulája két kisebb molekulára bomlik. Megjegyzendő, hogy « $d\nu$ » kicsiny, de nem végtelen kicsiny.

2. Egy gramm-molekula felbomlásánál elnyelt energia mennyisége nem függ a ható sugárzás intenzitásától, hanem csupán annak rezgésszámától és a gáz hőfokától.

3. Az időegység alatt felbomlott molekulák száma arányos a ható sugárzás intenzitásával és a fel nem bomlott molekulák számával.

4. A szétbomlott molekulák visszaalakulásánál a gáz ugyanazon « ν » és « $d\nu$ » jellemzőkkel bíró és ugyanoly mennyiségű sugárzási energiát bocsát ki, mint a mennyit a szétbomlásnál elnyelt; e mellett a visszaalakulás sebessége független a sugárzás intenzitásától.

Minthogy a sugárzás és a gáz közt termikus energiakicserélődés nincsen, ennél fogva a gázkeverék és a sugárzás közt egy termodinamikus egyensúly fog előállni, jöllehet hőfokuk különböző. A szerző felhasználja az adott feltevések tekintetbevételével a termodinamikának egyik alaptörvényét, a mely szerint egyensúly esetén az állapotjelzők elemi virtuális eltolódásánál beállott entropiaváltozás zérus.

Az elméletnek első lényeges következménye, hogy a sugárzás intenzitásának a hőmérséklettől való függését a WIEN-féle sugárzási törvény kell, hogy kifejezze:

$$I = \frac{h\nu^3}{c^2} e^{-\frac{h\nu}{kT}};$$

« h » és « k » univerzális állandók, c a fénysebesség. Ez a törvény, mint ismeretes, a fekete sugárzás magasabb rezgésszámú régióiban (ibolya és ibolyán túl) tényleg érvényes, még pedig annál inkább, minél alacsonyabb a sugárzás hőfoka. Sokkal figyelemreméltóbb azonban a második eredmény, a mely szerint egy molekula fotokémiai szétbontásához « $h\nu$ » energiamennyiség szükséges, ha a ható « ν » rezgésszámú sugárzás a már említett WIEN-féle törvény érvényességi körében van.

Tomits Iván.

V. Henri: Módszer az abszorpczió mennyiségi mérésére az ibolyántúli spektrumban. (Physik. Zeitschrift. 1913. 515 l.)

Az ultraibolya sugarak abszorpcziójának mennyiségi mérése oldatokban úgyszólván kizárólag fotografikus fotometrálsai eljárással történik. A módszer lényege az, hogy lefotografálunk egy ultraibolya spektrumot egyrészt szabadon (oldat esetében az oldószeren át), másrészt pedig a vizsgálandó anyagon (oldaton) keresztül s a két spektrum egyszínű részein előidézett feketedést összehasonlítjuk. A használt, e célra készült fotografikus lemezek átlátszók; a feketedés mértéke alatt az

$$S = \log \frac{i_2}{i_1}$$

mennyiséget szokás érteni, hol i_1 és i_2 egy, a lemezen a feketedés helyén merőlegesen áthaladó egyszínű sugárnak intenzitásai a belépés előtt és a kilépés után. Olyan fotografikus lemezekre, melyek nincsenek túl exponálva, SCHWARTZSCHILD azt találta, hogy a feketedés függését a beeső sugár intenzitásától (I) és a besugárzás idejétől (t) a következő képlet fejezi ki:

$$S = \log k I t^n;$$

« k » és « n » a lemeztől függő állandók (« n » az ily célra készült lemezeknél 0.8 és 1 közt ingadozik). Minthogy a mérési eljárásnál a két fénybenyomásnak egy lemezen való összehasonlításából áll, a « k » állandó nem játszik szerepet.

A mérés menetének szokott módja, hogy egy lemezre egymás mellé felvesszük a két összehasonlítandó színeképet és az egyszínű részek feketedéseinek viszonyát mikrofotometrikus eljárással megállapítjuk. A keresett intenzitás viszonyt a fenti SCHWARTZSCHILD-féle formula adja.

Ez az eljárás a mikrofotometrikus mérések hosszadalmas volta miatt rendkívül fáradtságos. A szerző ezért e helyett egy egyszerűbb módszert ajánl, mely az «egyenlő feketedések» elvén alapul.

Felvesz egy lemezre egymás alá pl. 45 ultraibolya spektrumot; és pedig felváltva 23-at, mint összehasonlító spektrumot a vizsgálandó anyag oldószerén keresztül állandó vastagság és besugárzási idő mellett, 22-t pedig a vizsgálandó oldaton keresztül, de az oldat vastagságát és az exponálás idejét megfelelően változtatva. Ezután nagyító lencsével kikeresi mindazokat a helyeket, a hol az összehasonlító és abszorpcziós spektrum-párok egyenlő feketedést mutatnak. A fenti formula megadja ismét a relatív intenzitást a spektrum egész hosszára nézve.

Fényforrásnak a szerző egy 3 mm-es vas-kadmium szikraközt használ, melyet egy perczenként 10000 megszakítással működő induktor táplál, a szekundér tekercsben 4 ampère effektív áramerősséggel. Ez a fényforrás elég állandó s elég intenzív és sűrű vonalas spektrumot ad egészen $\lambda=2144 \text{ \AA}$ hullámhosszig.¹

A nyert eredmények összehasonlítása másféle módszerekkel (fotometrikus eljárás a látható spektrumban, elektrometrikus módszer) teljesen kielégítő.

Tomits Iván.

¹ \AA jelent egy Ångström egységet, $= 10^{-8} \text{ cm}$.

PHYSIKAI LABORATORIUM.

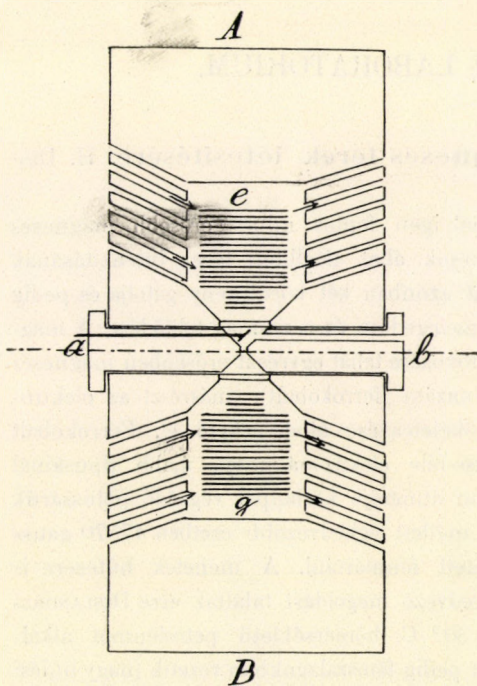
Kísérletek erős mágneses terek létesítésére. H. DESLANDRES és A. PEROT-tól.¹

Magnetooptikai vizsgálatoknál igen fontos minél erősebb mágneses terek előállítása. Elektromágnesek által előállított terek intenzitásának bizonyos határon túli fokozását azonban két körülmény gátolja és pedig az elektromágnes meneteinek melegevése és a vasmag telítődése. A mágneses tér intenzitásának továbbfokozása tehát egyrészt erősebben mágneses anyagnak vasmagul való alkalmazása (ferrokobalt), másrészt az elektromágnes hűtőberendezésének tökéletesítése által érhető el. Ferrokobalt vasinagot már a PIERRE WEISS-féle elektromágnesek újabb típusainál alkalmaznak s ezeknél a 3 mm átmérőjű körlappal végződő pólussarúk 2 mm-nyi kölcsönös távolsága mellett legkedvezőbb esetben 47570 gauss (c. g. s.) erősségű teret lehetett fenntartani. A menetek hűtésére is sokféle kísérlet történt. Igen kedvező megoldást találtak erre DESLANDRES és PEROT. Hűtő folyadékul — 30° C. hőmérsékletű petroleumot alkalmaznak, az elektromos áramot pedig fémszalagokban vezetik (nagy hűlési felület). A fémszalagokat nem kellett szigetelő réteggel körülvenni, mert maga a petroleum igen jól szigetel. 0.2 mm vastag vörösréz-szalagokban, ha azok mellett a petroleum $4 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ sebességgel áramlott, mm²-enként 1800 ampère sűrűségű áramot lehetett vezetni. E nagy intenzitású áramokat külön dinamogép szolgáltatta.

Petroleummal hűtött szalagvezetékek alkalmazásával a mágneses tér intenzitásának növelésére kétféle eljárást próbáltak ki. Az első eljárásnál középtípusú, rendes áramával táplált WEISS-féle elektromágnes mindkét pólussarúja körül alkalmaztak egy-egy szalagtekercset s azokat rendkívül erős árammal táplálták. Ily módon a már említett 3 mm átmérőjű,

¹ Comptes rendus, Paris. 158. 226. l. (1914.)

2 mm magasságú körhenger-térben 51000 gauss intenzitást lehetett elérni. A szalagtekercsek nélkül az elektromágnes csak 41000 gauss-t adott. A másik úton a szokásostól lényegesen eltérő berendezéssel szintén erős tereket sikerült előállítaniok. Az új elektromágnes vázlatosan



3. ábra.

erősítve, fényét 45° alatt hajló tükör reflektálja a másik pólussarúba fúrt hengeres nyíláson keresztül a megfigyelőhöz. Az *eg* vezetéken át-bocsátott áram intenzitása 1900 amp. volt (ez a maximális áramerősség, a melyet a használt dinamo szolgáltatni képes), becslés szerint a vezeték megbírt volna 4000 amp.-t. Az elért legnagyobb térintenzitás 50500 gauss, a maximális 4000 amp.-es árammal dolgozva 60000 gaussig lehet majd növelni. De az egyelőre elért 50500 gauss-nyi intenzitás is, tekintve a készülék kis súlyát (30 kg) és méreteit, igen szép eredmény.

a 3. ábrán van előtűntetve: az *ab* ferrokobalt-hegyű pólussarúkat egyetlen, órárugó módjára 20 menetben összegöngyölített vörösrézlemez (*eg*) veszi körül; a lemez vastagsága 0.3 mm, szélessége 20 mm, a szomszédos menetek köze 0.6 mm. Úgy a pólussarúkat, mint a réz-vezeteket henger alakú lágyvas-tömb *AB* veszi körül, melynek alapátmérete 220 mm, magassága 105 mm. A vashenger alapjaiból nagyszámú lyuk vezet a vezeték befogadó belső térbe; ezeken a lyukakon áramlik ki, ill. be a petroleum (a nyílak irányában). A fényforrás (apró cső vagy szikraköz; az ábrán nincs előtűntetve) az egyik pólussarúra van

Bartonic Emil.

ELŐADÁSI KISÉRLETEK.

Az esőgépkísérletekről. 1. A mozgás minősége. Az Atwood-féle esőgépeknél egyenletesen gyorsuló mozgást szokás feltételezni, a mi azonban csak szűk határok közt felel meg a valóságnak. Az eltérést a felfüggesztő szál súlya okozza, mely azalatt, hogy a könnyebb oldalról a nehezebbre megy át, fokozza a mozgató erőt. A mozgás differenciálegyenletéhez tehát a következőkép jutunk. Ha p jelenti a mozgást okozó túlsúlyt a kiindulási helyzetben, azaz a felrakott túlsúlyt, kivonva belőle a túlsó oldalon ellenkező értelemben működő szál súlyát, akkor s út végén a mozgató erő

$$p + 2as,$$

ha a szál hosszegységének súlyát a -val jelöljük (4. ábra). A differenciálegyenlet tehát:

$$m \frac{d^2s}{dt^2} = p + 2ds,$$

ahol m a mozgó tömeg, beleértve a csiga tehetlenségi nyomatékának megfelelőit, melyet a rovátékban egyenletesen eloszlottnak képzelünk.

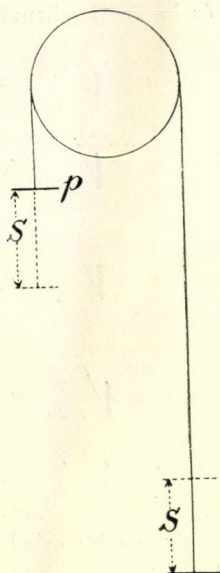
A gyorsulás tehát nem állandó, hanem esésközben folyton fokozódik.

A másodrendű differenciálegyenlet helyett elsőrendűvel dolgozhatunk, ha a munka és a mozgási energia megváltozásának egyenlőségéből indulunk ki:

$$(p + 2as) ds = d\left(\frac{mv^2}{2}\right),$$

melyből 0-tól s -ig ill. 0-tól v -ig integrálva

$$ps + as^2 = \frac{mv^2}{2},$$



4. ábra.

tehát

$$\sqrt{\frac{2p}{m}s + \frac{2a}{m}s^2} = v = \frac{ds}{dt}.$$

Integrálva :

$$t = \int \frac{ds}{\sqrt{\frac{2p}{m}s + \frac{2a}{m}s^2}} + C$$

$$t = \sqrt{\frac{m}{2a}} \lg_n \left[\sqrt{\frac{2a}{m}} \left(s + \frac{p}{2a} \right) + \sqrt{\frac{2p}{m}s + \frac{2a}{m}s^2} \right] + C$$

és ha $t=0$ pillanatban $s=0$,

$$\begin{aligned} t &= \sqrt{\frac{m}{2a}} \lg_n \left[\sqrt{\frac{2a}{m}} \left(s + \frac{p}{2a} \right) + \sqrt{\frac{2p}{m}s + \frac{2a}{m}s^2} \right] - \\ &\quad - \sqrt{\frac{m}{2a}} \lg_n \sqrt{\frac{2a}{m}} \frac{p}{2a} \\ &= \sqrt{\frac{m}{2a}} \lg_n \frac{\sqrt{\frac{2a}{m}} \left(s + \frac{p}{2a} \right) + \sqrt{\frac{2p}{m}s + \frac{2a}{m}s^2}}{\sqrt{\frac{2a}{m}} \cdot \frac{p}{2a}} = \\ &= \sqrt{\frac{m}{2a}} \lg_n \left[1 + \frac{2a}{p}s + 2\sqrt{\frac{a}{p}s + \left(\frac{a}{p}s\right)^2} \right] \\ t &= \sqrt{\frac{m}{2a}} \lg_n \left[1 + 2\left(\frac{a}{p}s + \sqrt{\frac{a}{p}s + \left(\frac{a}{p}s\right)^2}\right) \right]. \end{aligned} \quad (1)$$

Az eredményből kitűnik, hogy az esés ideje mindig ugyanaz lesz, ha s és p viszonya változatlan marad. Ugyanez érvényes az egyenletesen gyorsuló mozgásnál is:

$$t^2 = \frac{2s}{\gamma} = \frac{2sm^1}{p}, \quad (2)$$

csak hogy itt p az egész túlsúlyt jelenti, míg az előbbi képlet szerint csak a megindulás pillanatában működöt, azaz a szándékosan felrakottat, kivonva belőle az ellenkező értelemben működő szálnak a súlyát. Hogy ez esetben se legyen gondunk a szál súlyára, a rája akasztott súlyokat nem teszszük egészen egyenlővé, hanem úgy egyenlítjük ki, hogy a ki-

¹ γ = a gyorsulás.

indulási helyzetben, mikor a baloldali van a legmagasabban, legyenek kiegyensúlyozva, de úgy, hogy 10 vagy 20 cm-rel lejjebb hozva, a szál túlsúlya már megindítsa az esést. Az ezenfelül felrakandó túlsúly tekintendő a képletben fellépő p -nek. Így eljárva a súrlódást is ellensúlyozzuk.

Az 1. alatti képletből még a következő tulajdonságra következtetünk. Ha a kísérleteket úgy végezzük, hogy p és s ugyanaz maradjon és csak m változzék, az esés idejének négyzete arányos a tömeggel. A (2) képlet szerint tökéletesen ugyanaz áll az egyenletesen gyorsuló mozgásnál is.

2. *A végzendő kísérletek.* Az előbbi megfontolás szerint a mozgás az Atwood-féle esőgépen, eltekintve a mozgás akadályaitól, nem egyenletesen, hanem folyton fokozódó mértékben gyorsul. Előreláthatólag ugyanaz áll a súrlódás tekintetbevételével is, mely bizonyára legnagyobb a megindulás pillanatában és azontúl valószínűleg állandónak vehető. Befolyása annál kisebb lesz, minél könnyebben forgó csigát és minél vékonyabb és hajlékonyabb szálát használunk.

Azonban az elemi tanításnál kénytelenek vagyunk a szóban forgó mozgást egyenletesen gyorsulónak tekinteni, azért a mozgás törvényének igazolására vonatkozó kísérleteket akként végezzük, hogy ama törvénnyel lehetőleg pontosan megegyezzenek. Ennek módját a következő példával világítjuk meg. Ki akarjuk mutatni, hogy az utak arányosak az idők négyzeteivel, hogy tehát félakkora időnek az út negyede felel meg. Legyen a hosszabb út 4×64 cm és az esés ideje 8 másodperc, akkor a 64 cm utat, mely 4 másodpercnek megfelel, nem a nullánál, hanem 30 cm-nél kezdjük. Az indításra czélszerű egy külön alátámasztó szerkezetet használni, mely állandóan az osztályzott rúdra van erősítve, de működésén kívül nem akadályozza az esést.

A 30 cm-nek felvett hosszat megtalálhatjuk próbálgatással, de ki is számíthatjuk. Legyen ugyanis a keresett hossz σ , mely úgy választandó, hogy $s/4$ úton az esés éppen $t/2$ idő alatt történjék. Akkor az indítás pillanatában a túlsúly $p+2a\sigma$ és az esési idő kifejezése

$$\frac{t}{2} = \sqrt{\frac{m}{2a}} \lg_n \left[1 + 2 \frac{as}{4(p+2a\sigma)} + 2 \sqrt{\frac{as}{4(p+2a\sigma)} + \left(\frac{as}{4(p+2a\sigma)} \right)^2} \right].$$

Ebből az előbbi t egyenletének felhasználásával kiszámíthatjuk σ/s viszonyt.

A könnyebb áttekintés végett legyen

$$\begin{aligned} \frac{as}{p} &= b \\ \frac{as}{4(p+2a\sigma)} &= c \\ 1 + 2b + 2\sqrt{b+b^2} &= d^2 \end{aligned}$$

akkor c kifejezéséből következik:

$$\frac{2\sigma}{s} = \frac{1}{4c} - \frac{1}{b}.$$

b és c kiszámítására szolgálnak:

$$t = \sqrt{\frac{m}{2a}} \lg_n d^2$$

$$\frac{t}{2} = \sqrt{\frac{m}{2a}} \lg_n (1 + 2c + 2\sqrt{c + c^2}).$$

melyekből

$$1 + 2c + 2\sqrt{c + c^2} = d$$

és ebből

$$c = \frac{(d-1)^2}{4d},$$

$$\frac{1}{4c} = \frac{d}{(d-1)^2}.$$

Hasonlóan következik d^2 kifejezéséből:

$$b = \frac{(d^2-1)^2}{4d^2},$$

$$\frac{1}{b} = \frac{4d^2}{(d^2-1)^2}.$$

Eszerint:

$$\frac{2\sigma}{s} = \frac{d}{(d-1)^2} - \frac{4d^2}{(d^2-1)^2} = \frac{d}{(d+1)^2}.$$

d mindig pozitív és nem lehet kisebb egynél; határértéke elhanyagolható súlyú szálnál $= 1$. Ez esetben:

$$\sigma = \frac{s}{8}.$$

A szál befolyása mindig csökkenti σ értékét, de amíg súlya kicsiny a felrakott túlsúlyhoz képest, azaz $\frac{as}{p}$ kicsiny, addig σ csak kevésbé csökken. Kísérleteimnél $\frac{as}{p} = 0.045$ körül volt, a mi σ -át csak 0.3%-kal csökkentette. Esetünkben tehát σ csaknem 32 cm lenne, ami helyett 30 cm-t használók.

Az Arwood-féle géppel végzendő kísérletek közül legfontosabbak azok, melyekkel a gyorsulás arányosságát az erővel és fordított arányosságát a tömeggel hozzuk a felfogáshoz közelebb. Ezeknél nincs szükség arra, hogy az említett fogással éljünk, hanem mindig ugyanazon helyzetből indulhatunk ki, mintha a szál súlya nem változtatna a mozgás lefolyásán.

Az erővel való arányosságnál a mozgó tömegnek változatlanoknak kell lenni, azért a túlsúlyt azáltal változtatjuk meg, hogy az egyik oldalról a

másikra teszünk át valamit. A kiindulási helyzetben a fentebb említett módon történt kiegyenlítés után a bal oldalra teszünk A , a jobb oldalra B túlsúlyt, úgy, hogy a mozgást okozó túlsúly $p_1 = A - B$. Legyen s_1 a 10 mp-nek megfelelő út; azután áttesszük B -t az A -hoz, a mikor a túlsúly $p_2 = A + B$ és az ugyanannyi idő alatt megtett út s_2 ; akkor 1. képlet szerint

$$\frac{s_2}{s_1} = \frac{p_2}{p_1}, \quad (2)$$

tehát s_2 előre kiszámítható, tökéletesen úgy, mintha a mozgás egyenletesen gyorsuló lenne. De az egyenletesen gyorsuló mozgás képlete értelmében a γ_1 és γ_2 gyorsulások úgy aránylanak, mint az egyenlő időkből megtett utak s_1 és s_2 , ezekről pedig a kísérlet adatai mutatják, hogy viszonyuk egyenlő a túlsúlyok viszonyával, azért következik, hogy

$$\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{p_1}{p_2},$$

amit ki kellett mutatni. Kitűnik ebből, hogy ámbár a mozgás tényleg nem egyenletesen gyorsuló, a következtetés mégis éppen olyan helyes, mintha a kísérleteket egyenletesen gyorsuló mozgáson és ugyanakkora megfigyelési hibákkal végeztük volna.

A gyorsulás fordított arányosságát a tömeggel csak akkor mutathatjuk ki, ha ismerjük a csigának a rovátkra, ill. a szál közepének a tengelytől számított távolságára redukált tömegét. Ezt vagy a tehetetlenségi nyomaték segítségével vagy egyszerűbben az esőgéppel végzett kísérletekkel határozzuk meg. Ezen redukált tömeget ismeretesnek feltételezve, az összes mozgó tömeget m_1 , ill. m_2 két esetben akként állapítjuk meg, hogy viszonyuk két egész szám négyzetének viszonyával, p. 100:64-gyel legyen egyenlő. A használandó túlsúly mindkét esetben ugyanaz maradjon, a felrakandó tömeget tehát a két oldalon egyenlően osztjuk el. Beállítjuk azon esés magasságot, melynél az esési idő a nagyobb tömeg esetében pl. éppen 10 mp, akkor a kisebbik tömegnek t képlete szerint (1) pontosan 8 mp. alatt kell leesnie, mert az esés idejének négyzete ugyanazon s és p -nél éppen úgy arányos a tömeggel, mint az egyenletesen gyorsuló mozgásnál. A kísérlet tehát közvetlenül azt mutatja, hogy

$$\frac{t_1^2}{t_2^2} = \frac{m_1}{m_2},$$

a mi teljes összhangzásban van

$$s = \frac{\gamma}{2} t^2 = \frac{p}{2m} t^2$$

képlettel, melyben esetünkre alkalmazva s és p állandó. De ugyanezen képlet szerint a gyorsulás fordított arányban áll az idő négyzetével, tehát a kísérletek szerint a tömeggel is, a mit igazolni akartunk.

Megjegyzendő, hogy a nagyobbik tömeg esetében a súrlódás hatása is valamivel nagyobb lesz, a kiindulási helyzetben tehát új kiegyenlítésre lehet szükség.

Az esőgéphez alkalmas egyszerű vagy többszörös fonalat erős czérnából készíthetünk, ha alkoholos sellakoldattal egyenletesen áztatjuk és kifestítve hagyjuk megszáradni.

Jelen közlemény végkövetkeztetése az, hogy — ámbár az esőgépen a mozgás a szál súlya miatt nem egyenletesen gyorsuló — a szokásos előadási kísérleteket mégis akként végezhetjük, hogy az egyenletes gyorsulásnak teljesen megfeleljenek.

Schuller Alajos.

ELŐADÁSAINKRÓL.

Hogy a Matematikai és Fizikai Társulatban folyó életéről vidéki tagtársainkat is tájékoztassuk, a jövőben a Társulatban tartott előadásokról rövid jelentéseket fogunk közzétenni e Lapoknak az előadást követő számába, még akkor is, ha az előadás későbbben részletesen megjelenik. Ez úton is felkérjük tehát igen tisztelt előadó tagtársainkat, hogy előadásukról rövid — legfeljebb $\frac{1}{2}$ nyomtatott oldal terjedelmű — kivonatot készítsenek és azt közvetlenül az előadás után a szerkesztők egyikének átadni sziveskedjenek.

A folyó évben tartott előadások jegyzékét, az utolsó előadások rövid tartalmával itt közöljük:

- Jan. 15. Dr. EHRENHAFTH FÉLIX, a bécsi egyetem tanára: Az elektromosság szerkezetéről.
- Jan. 29. Dr. FEKETE MIHÁLY: Serge Bernsteinnek egy tétele a trigonometrikus polinómokról.
Dr. SELÉNYI PÁL: Gömbalakú inhomogén fényhullámokról.
- Febr. 12. Dr. ZEMPLÉN GYÖZÖ: Színképvonalak felbomlása elektromos erőterben (megjelenik Lapunk legközelebbi számában).
Dr. SZÜCS ADOLF: A három test problémájáról.
- Febr. 26. Dr. DEMECZKY MIHÁLY: A kongruenciák elméletéhez.
- Márcz. 12. BARTONIEK EMIL: A hengeres sípok elméletéhez.
EGERVÁRY JENŐ: Az integrálegyenletek egy osztályáról.
- Márcz. 26. Dr. GÖCZE ZOÁRD: Egy varietás quadraturájáról.

Kivonat: A q dimenziós tér p szeresen kiterjedt varietásához ($p \leq q$) V_p^q -hoz egy C_p^q érték definiálható úgy, hogy C_1^2 a V_1^2 síkgörbe C_1^3 a V_1^3 térgörbe ívhossza C_2^3 a V_2^3 felület területe a LEBESGUE-féle definíciók szerint. Ha V_p^q rektifikálható, azaz, ha a V_p^q -t definiáló q számú függvény mindenike a p számú változó mindenikére nézve eleget tesz a LIPSCHITZ-féle feltételnek, úgy C_p^q véges. A rektifikálható V_2^3 és V_2^2 C_2^3 illetve

C_2^3 értékének a meghatározása egy speciális rektifikábilis $V_2^3 C_2^3$ féle értékének bizonyos módon való meghatározásában áll. Analógia folytán: a rektifikábilis $V_3^3 C_3^3$ féle értékének a meghatározása egy speciális rektifikábilis V_3^3 -ra vonatkozó vizsgálatot igényel. Ezen speciális V_3^3 úgy keletkezik egy koczkából, hogy a koczka egy oly folytonos deformációt szenved, hogy minden pontjának az elmozdulása egy állandó irány-nyal, például a koczka egyik élével párhuzamos.

Dr. SCHRODT ISTVÁN. Lineáris gázmozgások kísérleti vizsgálata (bemutatókival).

Kivonat: Lineáris gázmozgások kísérleti vizsgálatára fel lehet használni egy módszert, melynek segítségével mozgó gáz állapotjelzőit és sebességeit pontról-pontra nagy pontossággal meg lehet állapítani. Az eljárás abban áll, hogy egy bolométert, a GÁTI-féle barrettert el kell helyezni a mozgó levegőbe, mikor is mivel a barretterben stacionárius állapot esetén az időegység alatt az áramerősség négyzetével arányos meleg keletkezik, a barretter olyan hőmérsékletet fog felvenni, hogy a fönnálló hűlési viszonyok mellett ez a mennyiség vezetéssel és áramlással az időegység alatt a környezetbe átjusson. A barretter-drót hőmérséklete, tehát ellenállása, függeni fog a mozgó levegő állapotjelzőitől és sebességétől, mert a hűlési viszonyok ezekről függenek. A barretter-drót 0.5 mm hosszú és 0.0005 mm vastag WOLLASTON-drót, mely drót ellenállásának változását EINTHOVEN-galvanóméterrel lehet regisztrálni. Ha három különböző barrettert helyezünk el egymáshoz közel, a megfelelő három galvanométer kiütéseiből grafikus úton a gáz állapotjelzőit és sebességét meg lehet határozni. A barretter tömeghatása oly kicsiny, hogy teljesen elhanyagolható s a viszonyokat mindig stacionáriusoknak lehet feltételezni. Ez eljárással a hosszú hengeres csövekben fellépő lökéshullámok terjedését és olyan stacionárius légmozgásokat lehetett megvizsgálni, melyeknél egy hosszú cső egyik vége nyitott volt, másik végét elzáró dugattyú pedig szinuszmozgást végzett. Méréseket lehetett a műszerrel végezni gázgépek belsejében, vízben, stb. A mérés érzékenysége hőmérsékletben 0.001°C és sebességben $0.2 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$ sebesség.

Ápr. 16. Dr. FRÖHLICH IZIDOR. A LORENTZ-féle recziprocitási tétel az optikában.

Kivonat: Előadó mindenekelőtt ismerteti e tételt LORENTZ eredeti fogalmazásában; e szerint: Valamely P pont helyén lévő, igen kicsiny, S térfogatban h irány mentén mindenütt egyenlő erősségű, egyenes vonalú, egyszerűen harmonikus módon váltakozó elektromos indító erő

működik; akkor ez a térnek valamely más, P' helyén, tetszésszerűen h' irány mentén meghatározott elektromos polározásbeli áramot létesít. Ha most megfordítva, ugyanily természetű homogén elektromos erőforrás a P' pont helyén lévő S' kicsiny térfogatban van jelen, mely erő h' irány mentén váltakozik: akkor e forrás, ha az előbbivel egyenlő erősségű, a P pont helyén, a h irány mentén ugyanakkora ily áramot létesít, mint az első fényforrás P' -ben a h' mentén. E tétel egynemű, egyenes vonalú fényforrásokra és az általuk létesített fényvektorokra nézve is kimondható. Előadó részletesen kimutatja, hogy e viszonyossági tétel még homogén és izotrop közegek esetében is csak akkor áll fenn, ha e források térfogati méretei kicsinyek és a PP' távolság igen nagy a hullámhosszúsághoz képest. Külön ily tételt állít fel, mikor e két pont egymástól különböző két egynemű és egyöntetű közegben van, melyeket gömbfelület választ el egymástól s a két pont e felülettől a hullámhosszúsághoz képest igen nagy távolságban van, továbbá egybekötő egyenesük a gömbfelület középpontján halad át. Végre jelzi, hogy e viszonyossági tétel, a mennyiben pontosan érvényes, független LORENTZ bizonyításától és a fényelmélet közismert tételes eredményeinek egyik szigorú folyománya.

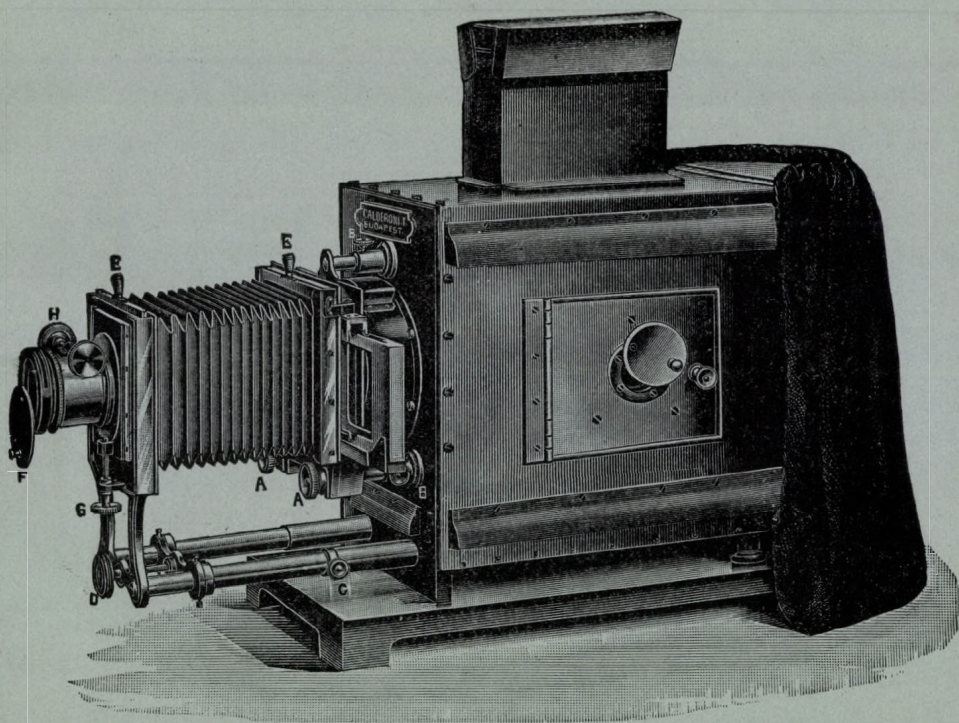
BODÓCS ISTVÁN. Váltakozó áramú demonstrációk a középiskolában.

Kivonat: Előadó mindenekelőtt egyszerű számítások alapján figyelemztet arra, hogy az elektromágneses indukcióra vonatkozó alapkisérleteknél akkor kapható a lehető legnagyobb áramerősség, ha az áramjelző készülék ellenállása egyenlő az indukciós tekercs ellenállásával. A bemutatott készülékeknél ezt a szabályt mindig szem előtt tartotta; alkalmas tekercsnek és izzólámpáknak, mint áramjelzőknek felhasználásával bemutatta az indukció alaptüneményeit, a zárási és nyitási külön áramot, az önindukció és kapacitás hatását váltakozó áramú körben, és az elektroinduktív taszítást.

Calderoni mű- és tanszervállalat r.-t.

Budapest, IV., Váci-utca 50.

Ajánlja saját szerkesztésű szabadalmazott vetítőkészülékeit.



Vetítőkészülék «Calderoni I»

Ezen készülék lámpa-szekrénye legjobb minőségű aczélemezekből van készítve, eternit-béléssel és kitűnő szellőztető szerkezettel van ellátva, 120 mm. átm. kettős megvilágító-lencsével (Kondensor), hajtócsavarral ellátott objektív-foglalattal, egy ebbe illő kitűnő vetítési objektívvel, a finom beállítás részére szolgáló mikrometer-csavarral és tolószerkezettel ellátott kettős kép-váltó kerettel van felszerelve. A kondensor-lencsék a lámpatartó szekrényen kívül vannak elhelyezve és a lencsék közt felmelegedő levegő a kondensortartó cső felső részén levő és egy kis fedővel borított nyíláson át távozik. A kondensor mögött egy kali-üvegből készített védőlemez van elhelyezve. — A készülék, mely egy áttört vastalapzatra van felszerelve, teljesen fémből van készítve. — A bronzból készített objektívet tartó előrész egy mikrometer-csavar segítségével magasabbra és mélyebbre állítható. Az oldalajtóval és bárszögből készült fényelzáró-függőnnyel ellátott készülék ára fenti felszereléssel lámpa nélkül

K 260.—

Vetítőkészülék «Calderoni I. H.»

Ezen készülék, mely ugyanolyan szerkezetű mint a túloldali, egy általunk szerkesztett hűtővel van még ellátva, mely a megvilágító lencsék közé van igtatva. — Ezen felszerelés vetítő készülékünket a legtökéletesebb ilyenmű készülékké avatja. Ára *lámpa nélkül* K 350.—

A vetítőkészülékeinkhez felszerelt hajtócsavarral ellátott objektív foglalatba tetszés szerinti 6 különféle gyújtávolságu vetítési objectivet lehet elhelyezni, melynek gyújtávolsága 150, 200, 250, 310, 355, 405, mm. — Minden készülékhez a fentjelzett árban csak egy darab ilyen vetítési objektív tartozik. — Minden további objektív ára darabonként K 24.—

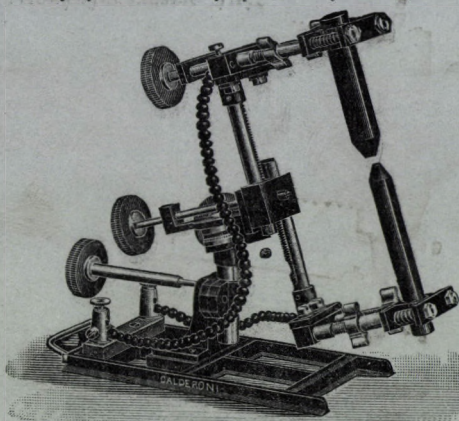
Vetítőkészülékeink a merőleges és vízszintes síkban végbemenő vetítésre, valamint mikroszkopikus vetítésre is, úgy szintén szinképek, interferenciális tűnemények, fényelhajlási, fénycsarkítási és kettős törési kísérletek stb. vetítésére is alkalmasak. Ezen mellékeszközkörről addig is, míg az ezekről szóló külön árjegyzékünk meg fog jelenni, kívánatra szívesen küldünk részletes költségvetéseket. Vetítőkészülékeinket — melyek a legtökéletesebbek — tetszés szerinti fényforrással, u. m. villamos ívfénnyel, mészfénnyel, acetylénnel, borszesz-izzófénnyel stb. szállítjuk.

Elektromos ívlámpa

legjobb minőségű és felette erős szerkezetű (mellékelt ábra szerint) mely hajtócsavarok segítségével minden irányban könnyen mozgatható, 110—220 volt feszültségű egyen- vagy váltóáramhoz, 5—50 Ampère áramerősségig használható. Ára K 120.—

Elektromos ívlámpa

egyszerűbb és könnyebb szerkezetű. Ára K 90.—



Borszesz-izzófénylámpa légsűrítővel ellátva, mely 300 gyertya-fény erejű világítást szolgáltat. Ára teljesen felszerelve K 50.—

Háromlábú asztalállvány, mely hajtócsavar-szerkezet segítségével magasabbra és mélyebbre állítható, felső lapja pedig a vetítőkészülék által esetleg megkívánt szög alá, illetve ferde állásba hozható. Ára K 110.—

Vetítési ernyő finom vászonnál 200 cm. négyzetben, gyűrűkkel ellátva. Ára K 8.—

Ernyő-állvány fenti ernyő részére, mely könnyen és gyorsan szétszedhető. Ára szekrényben K 30.—

Vetítési ernyők zsinórral felhúzható szerkezettel. — Ezen ernyők legcélszerűbben a falra erősítendő 2 vastámaszra szerelendők, azonban bárhová, esetleg közvetlenül a falra is felerősíthetők. — Az ernyők árai — a következők:

200	240	300	360	420	480 cm. négyzetben
Ára 45.—	65.—	90.—	145.—	200.—	240.— korona.

Calderoni mű- és tanszervállalat részvénytársaság, Budapest, IV., Váci-utca 50.

Részletes nagy árjegyzék vetítőkészülékeinkről munkában van.

50255

MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI LAPOK

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT MEGBIZÁSÁBÓL

SZERKESZTIK

FEJÉR LIPÓT és ZEMPLÉN GYŐZŐ

HUSZONHARMADIK ÉVFOLYAM

V. FÜZET

1914

MÁJUS.

BUDAPEST

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADEMIA TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT

1914.



TARTALOM.

	Lap
GOLDZIHER KÁROLY: A járadékszámítás kamatlábproblémája	231
SCHWEITZER PÁL: Egy egyenlőtlenség az aritmetikai középértékről	257
SZILÁRD BÉLA: Az elektromos feszültség távolból való méréséről, kontaktus nélkül	262
<i>Physikai Szemle</i> : H. RUKOP és J. ZENNEK: Nagy frekvenciájú áram transzformálása a frekvencia háromszorosára (GYULAI Z.) 268. l. — Mérések a víz elektromágneses spektrumában, lökészerűen gerjesztett, kevésbé csillapított 60—20 cm. hullámhosszúságú rezgésekkel (RUKOP, SELÉNYI) 270. l.	
<i>Physikai laboratórium</i> : J. HARTMANN: Műszer és eljárás a felületi fényességnek fotografikus mérésére. 273. l. — E. LEHMANN: Egy új fotométerkonstrukció 275 l. — P. P. KOCH: Registráló mikrofométer (SELÉNYI) 275. l.	
A Matematikai és Physikai Társulat huszonegyedik rendes közgyűlése	276
Előadásainkról	284
Új tagjaink névjegyzéke	286

Lapunk legközelebbi száma október hó második felében jelenik meg.

Értesítjük olvasóinkat, hogy folyó évi január elsejétől fogva e Lapok szerkesztését az alulírottak vették át. E munkánkban az eddigi szellemhez óhajtván ragaszkodni, hangsúlyozzuk t. munkatársaink előtt, hogy igen szívesen közlünk oly rövid és alapos dolgozatokat, a melyek a tudománynak különösen újabb eredményeit könnyen érthető modorban ismertetik.

Fejér Lipót és Zemplén Győző.

A folyóirat szellemi részét illető közlemények (cikkek, feladatok, stb.) a szerkesztőkhöz küldendők, és pedig a matematikai tárgyuak *Fejér Lipót (V., Falk Miksa-utca 15.)*, a fizikai tárgyuak pedig *Zemplén Győző (I., Fehérvári-út 54/a)* címére. T. munkatársainkat kérjük, hogy kézírataikra mindenkor írják fel a pontos címet, melyre a korrekturek küldendők.

Minden szerzőnek 25 pld. különlenyomatot adunk üres borítókkal (kivéve az *Irodalom*, *Physikai Szemle*, *Physikai Laboratórium*, *Megoldott feladatok* stb. rovatokban megjelent közleményeket). Címzett borítékot vagy több különlenyomatot csak külön kívánságra, a megfelelő költségek felszámításával adhatunk.

Társulati mondanivalók. A huszonharmadik társulati év 1914 január elsején kezdődött.

A *tagsági díj* (Budapesten 10 korona, vidéken 6 korona) az Alapszabályok VII., 12. §-a szerint az év első negyedében esedékes. Kérjük t. Tagtársainkat, szíveskedjenek a tagsági díjat a társulat pénztárnoka: *Privoroszky Alajos* (VII., Ilka-u. 32) címére beküldeni. A befizetések megkönnyítése végett januári füzetünkhöz póstai befizető lapokat melléeltünk. **A június végéig be nem érkező tagsági díjakat póstai megbízás útján fogjuk beszedni.**

Kérjük tagtársainkat, hogy mindazokat, a kik a matematika vagy fizika iránt érdeklődnek, tagokul ajánlják. A tagajánlások és a társulat ügyeire vonatkozó egyéb kérdések *Zemplén Győző* ügyvivő titkár fenti címére intézendők.

A reklamációk, címváltozások a pénztárnokhoz intézendők.

MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI LAPOK

E folyóirat évenként 8, legalább három fvényi füzetben jelenik meg, a nyári hónapok kivételével, a hó második felében.

Előfizetési díj egy évre 10 K, A Matematikai és Fizikai Társulat tagjai a folyóiratot tagságdíjuk fejében kapják.

23. évfolyam.

1914. május.

5. füzet.

A JÁRADÉKSZÁMÍTÁS KAMATLÁBPROBLÉMÁJA.

(Második és befejező közlemény.)

III. A járadékszámítás trinomikus egyenletének algebrai tárgyalása.

1. A II. fejezetben szereplő egyenletekben a jelváltozások száma *kettő* és az egyik — gyakorlati szempontból triviális — pozitív gyök = 1. Az 1. trinomikus egyenleteket továbbá jellemzi, hogy a két utolsó együtttható közötti különbség = 1; ezen a speciális tulajdonságon és a már említett tárgyi kettéválasztáson múlik, hogy a GAUSS-féle tárgyalás alapján kimutatható, hogy a jelszabály értelmében létező másik pozitív gyök mindig különböző a triviális megoldástól. A gyakorlati feladat tehát ennek a nem triviális gyöknek kiszámítására van visszavezetve. A kamatlábprobléma alapvető esete így természetesen kiindulással reávezet a trinomikus egyenlet GAUSS-féle megoldásának alkalmazására. Ezen az uton indul meg pl. CANTELLI is¹, de megoldási módja numerikus tekintetben nem a legegyszerűbb, mivel nem az addicziós logaritmusok, hanem a trigonometrikus logaritmusok bevezetésével dolgozik. A következőkben RUNGE idézett munkájának menetét követjük, már a probléma diszkussziójánál is. Ugyanis a szerint, a mint az általános kétjelváltozós

$$y^{m+n} - ey^m + f = 0 \quad (3)$$

¹ «On the determination of the rate of interest in annuities certain» (Journal of the Inst. of Act. XLI. 1907); l. ALTENBURGER ismertetését a Keresked. Szakoktatás XV(1907). évf. 344—346. o.

egyenletben az

$$y^{m+n} = f t g^2 \theta \quad \text{vagy} \quad y^{m+n} = f t^{m+n}$$

helyettesítést végezzük, a trigonometrikus vagy az addíciós logaritmikus képletekhez jutunk.

GAUSS a 3. egyenlet esetére a következő elméleti eredményeket állapítja meg:¹

$$A \quad \lambda = f n e^{-(m+n)}, \quad \lambda^* = \frac{m^n n^n}{(m+n)^{m+n}}$$

jelölések bevezetésével az egyenlet algebrai taglalása a következő:

- a) $\lambda > \lambda^*$: a pozitív gyökök száma = 0
- b) $\lambda = \lambda^*$: a pozitív gyök kettős gyök
- c) $\lambda < \lambda^*$: a pozitív gyökök száma = 2, még pedig:

a) $\lambda > \frac{1}{2^{m+n}}$: mindkét gyökre: $t = y f^{-\frac{1}{m+n}} \geq 1$, a szerint, a mint $m \geq n$.

β) $\lambda < \frac{1}{2^{m+n}}$: az egyik gyökre $t > 1$, a másikra $t < 1$.

γ) $\lambda = \frac{1}{2^{m+n}}$: az egyik gyökre $t = 1$, a másikra $t \geq 1$.

Bebizonyítjuk mindenekelőtt, hogy mindkét típusú 1. egyenletünk a c) csoportból való. Ezek alakja ugyanis:

$$y^k - e y + e - 1 = 0 \quad \begin{cases} A) & e > k \\ B) & e < k \end{cases} \quad (k > 1, e > 1),$$

tehát esetünkben:

$$\lambda = \frac{(e-1)^{k-1}}{e^k}, \quad \lambda^* = \frac{(k-1)^{k-1}}{k^k}.$$

Az, hogy

$$\lambda < \lambda^*$$

a következő elementáris tételből következik:

A $\lambda(e)$ függvény e növekedésével fogyó
növekedő viselkedést mutat.

¹ I. RUNGE id. m. 141–144. o.

tat, a szerint, a mint $e \geq k$ (maximumát az $e = k$ eset jellemzi).

Bizonyítás: A felvétel következtében:

$$\frac{d\lambda}{de} = \frac{k-1}{e-1} - \frac{k}{e} \leq 0, \text{ a szerint, a mint } \frac{k-1}{e-1} \leq \frac{k}{e},$$

vagyis, a mint

$$e \geq k.$$

Továbbá:

$$\left(\frac{d^2\lambda}{de^2} \right)_{e=k} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k-1} < 0.$$

Az együtthatók között fennálló speciális összefüggés és a tárgyi alapon történt kettéválasztás biztosítja tehát, hogy

az A) típus esetében: $\lambda < \lambda_{max} = \lambda^*$, mivel $e > k$,

a B) típus esetében: $\lambda < \lambda_{max} = \lambda^*$, mivel $e < k$.

E taglalásnál az a lényeges, hogy állandóan tekintetbe vehetjük a probléma *tárgyi* vonatkozásait és hogy egyenesen hozzáfűzhető a GAUSS-féle vizsgálathoz. A nem triviális gyök létezésének egyéb egyszerű bizonyítását a grafikai módszerek ismertetése kapcsán adjuk, ez az eljárás voltaképpen szemlélteti a most bemutatott levezetés részleteit. A létezést más uton is bizonyíthatjuk, így egyszerű függvénytanai megbecsüléssel vagy a triviális megoldás leválasztása után algebrai meggondolással. Az első utat követi v. SCHAEWEN már idézett cikkében, a második módra KÖNIG Gyula tanár úr figyelmeztetett. A v. SCHAEWEN-féle megbecsülés továbbá arra is reávezt, hogy a két pozitív gyökre:

az A) típus esetében: $1 \leq y < 2$,

a B) típus esetében: $0 < y \leq 1$.

A 3. egyenlet t és λ már jelzett bevezetésével a

$$t^n + t^{-m} = \lambda^{-\frac{1}{m+n}} \quad (3')$$

alakban írható. A triviális megoldást jellemzi, hogy $t < 1$; továbbá mindkét típusnál: $m < n$.

A v. SCHAEWEN-féle eredmények vagy tárgyi megfontolások

alapján belátható, hogy a nem triviális gyökre vonatkozólag az *A)* típusnál a GAUSS-féle összeállítás *c_a)* vagy *c_β)*, a *B)* típusnál mindenkor a *c_a)* alelete szerepel. Részletesen:

$$A) \quad 1 < y < 2, \quad \text{tehát:}$$

$$(e-1)^{-\frac{1}{k}} < t < 2(e-1)^{-\frac{1}{k}}$$

és így

$$\lambda^{-1} = \left(\frac{e}{e-1}\right)^{k-1} e = \left(1 + \frac{1}{e-1}\right)^{k-1} e \leq 2^{k-1} e;$$

vagyis a szerint, a mint:

$$\lambda^{-1} \leq 2^k : t \leq 1.$$

$$B) \quad \frac{1}{2} < y < 1,$$

tehát

$$\frac{1}{2}(e-1)^{-\frac{1}{k}} < t < (e-1)^{-\frac{1}{k}}$$

vagyis mindenkor:

$$t < 1 \\ \lambda^{-1} < 2^k.$$

2. GAUSS eljárásának numerikus része a kamatlábfela megoldására igen czélszerűen alkalmazható, ha az addicziós logaríthmusokra vezető képleteket használjuk. A számításoknál vagy a $t > 1$, vagy a $t < 1$ eset fordulhat elő; figyelembe veendők a következő képletek:¹

a) $t > 1$: 3') alakja:

$$t^n \{1 + t^{-(m+n)}\} = \lambda^{-\frac{1}{m+n}}$$

vagyis az

$$A = \log t^{-(m+n)}, \quad B = \log \{1 + t^{-(m+n)}\}$$

jelölésekkel a

$$-nA + (m+n) B = -\log \lambda \quad (4)$$

egyenlethez jutunk.

¹ I. RUNGE id. m.

b) $t < 1$: 3') alakja:

$$t^{-m}(1 - t^{m+n}) = \lambda^{-\frac{1}{m+n}}$$

vagyis az

$$A = \log t^{m+n}, \quad B = \log (1 + t^{m+n})$$

jelölésekkel a

$$-mA + (m+n)B = -\log \lambda \quad (4')$$

egyenlethez jutunk.

Mindkét esetben

$$A < 0$$

úgy hogy — igen czélszerűen — az addiczióslogarithmusok táblázatának csak egy része jön tekintetbe. A numerikus munka A megközelítő kiszámítására van visszavezetve a (4.) ill. (4') egyenletek alapján GAUSS-féle logarithmus-táblázat segítségével. A meghatározása után a végső eredmény:

$$y = \text{num log } \frac{A + \log f}{m+n};$$

problémánknál speciálisan:

$$x = \text{num log } \frac{A - \log (s_{\overline{n}} - 1)}{n};$$

vagy

$$x = \text{num log } \frac{A + \log \sigma_{\overline{n}}}{n+1},$$

illetőleg:

$$z = \text{num log } \frac{A + \log a_{\overline{n}}}{n+1}$$

vagy

$$z = \text{num log } \frac{A + \log (a_{\overline{n}} - 1)}{n}.$$

A meghatározásánál a táblázat két megfelelő értéket szolgáltat, ezek közül egyik a triviális megoldáshoz tartozik. Kimutatható, hogy a $t < 1$ — leggyakrabban előforduló — esetben az A) típusnál a nagyobb, a B) típusnál a kisebb érték veendő $A + 10$ számára.

A kamatlábfeladat megoldásához ezek szerint a közönséges logaritmus-táblázaton kívül csak a GAUSS-féle addicziós logaritmusok táblázatára szorulunk. E táblázatok használata igen nehézkes lesz, ha A pontosabb meghatározása céljából több tizedes jegyig kiszámított, nagyobb tabellával dolgozunk. A számítás szempontjából tehát gyorsabban célhoz vezető eljárásról kell gondoskodnunk. Az ismeretes GUNDELFINGER-féle tabellák¹ berendezése nagy részben könnyít már az említett körülményen; a mi esetünkben azonban újabb bővítés nélkül e munka nem alkalmas, mivel csak az

$$n, n + 1 \leq 40$$

és így gyakorlatilag nem elegendő esetekben volna használható.² E körülmények figyelembe vételével a tényleges számoló munka célszerű berendezésére a következő utat ajánljuk: A GAUSS-féle értekezésben közölt legegyszerűbb — A -ra nézve egy tizedesig haladó — és egy féloldalon elférő kis addicziós logaritmus-táblázattal igen gyorsan meghatározhatjuk A egy első közelítő értékét; ezen értéket azután a MEHMKE-féle elsőfokú korrekciós eljárással folytatólagosan megjavítjuk. MEHMKE az algebrai egyenletek valós gyökeinek kiszámításánál igen célszerűen alkalmazta ezt a módszert, dolgozatában az első közelítő érték meghatározására a grafikai utat ajánlja. Mint a kidolgozandó példában látni fogjuk, ilyen módon a GAUSS-féle kis táblázat mellett csak a közönséges logaritmus-táblázatra szorulunk. A számítás úgy végezhető, hogy minden korrekciós *menet* alkalmával meghatározhatjuk az *eltérést* és ezáltal eldönthetjük, vajjon a gyök értéke a kívánt pontosságot már elérte-e.

3. A jelzett számító eljárásnak alkalmazását a kamatláb-probléma esetében a következő példán mutatjuk be:

$$x^{100} - 200x + 199 = 0.$$

¹ «Tafeln zur Berechnung der reellen Wurzeln sämtlicher trinomischer Gleichungen» (Leipzig. Teubner, 1897).

² L. erről német dolgozatunkat (417. o.)

Ugyanezt a példát dolgozza ki RUNGE¹ és BROGGI, a javító menetek helyett azonban nagyobb addicziós logaritmus-táblázatot használva.

Ebben az esetben $t < 1$ és a GAUSS-féle kis táblázat alapján a nem triviális megoldásra vonatkozólag azt találjuk, hogy:

$$A = \log t^{100} = 8.2166$$

tehát az első közelítő érték:

$$\log x = \frac{A + \log 199}{100} = 0,005154.$$

Ezen értékre már most két MEHMKE-féle menetet² alkalmazunk, mindegyiknél hatjegyű közönséges logaritmus-táblázatot használván:

I. menet:		II. menet:	
$\log x = 0,005154$		$\log x = 0,005532$	
$\log 200 = 2,301030$		$\log 200 = 2,301030$	
$\log II = 2,306184$	— 1	$\log II = 2,306562$	
$100 \log x = \log I = 0,515453$	100	$\log I = 0,553214$	
I: $\underline{3,276823}$	769	I: $\underline{3,574492}$	833
II: $\underline{202,387619}$	— 476	II: $\underline{202,563809}$	— 476
$R = -0,110796$		$R = +0,010683$	
$S =$	293	$S =$	357
$\delta = -\frac{R}{S} = 0,0003781$		$\delta = -0,00002992$	
$\log x = 0,005532$		$\log x = 0,0055021$	
(Eltérés ³ = — 0,0106831)		(Eltérés = + 0,0001667).	

¹ ld. m. 147—148. o.; itt megtalálható az egyenlethez tartozó kamatlábprobléma kitűzése.

² Az előforduló jelölések magyarázata: Ha az eredeti egyenlet:

$$f(x) = 0$$

és x_0 egy közelítő érték, melyre

$$f(x_0) = R,$$

akkor a δ -val történő javításnál *elsőfokú* megközelítésben

$$f(x_0 + \delta) = R + S\delta = 0,$$

ha

$$\delta = -\frac{R}{S}.$$

³ Az eltérés a következő menetben — R .

RUNGE a kétjegyű GAUSS-féle táblázattal interpolálva, ezt nyeri:

$$A = 8.2514, \quad \log x = 0.005503.$$

Erre az értékre alkalmazván egy MEHMKE-féle menetet:

$$\log x = 0.0055027.$$

Az eredmények összehasonlítása (az igazi érték: $x = 1.01274$):

	x	+ Hiba. 10^5
RUNGE	1.0127517	1.17
RUNGE egy menettel	1.0127507	1.07
Egy menettel	1.0127522	1.22
Két menettel	1.0127491	0.91

Példánkban tehát *négy* tizedes jegyű pontossággal a két menettel való számítás igen kielégítőnek bizonyul.

IV. LánCGyökök szerint haladó sorozatok alkalmazása.

1. A következőkben az algebrai egyenletek gyökeinek kiszámítására ismeretes *iterációs* módszer egyik általánosabb alakját alkalmazzuk problémánk megoldására.¹ Ha az

¹ A rendes iterációs eljárás (l. pl. RUNGE id. m. 153—154. o.) a leg-egyszerűbb alakú

$$x = f(x)$$

szétbontásból indul ki és czélszerű berendezéssel gyors konvergenciát mutat. Ezen módszert újabban de MONTESSUS nagyban tökéletesítette, a mennyiben két hasonló szétbontásból egy még gyorsabban célhoz vezető iterációs folyamatot létesített. (Comptes Rendus 1909 és «Méthode générale de détermination des racines des équations numériques». Louvain 1910). Hasonló eljárást dolgozott ki SZILÁRD a kamatlábprobléma esetére (Kereskedelmi Szakoktatás XIX. (1910) 23—27. o.) és ilyen módon az eredeti sukcesszív approximációs GHYCY-féle módszer konvergenciáját nagyban gyorsította. A fent használt módszer irodalmát l. a bevezetésben.

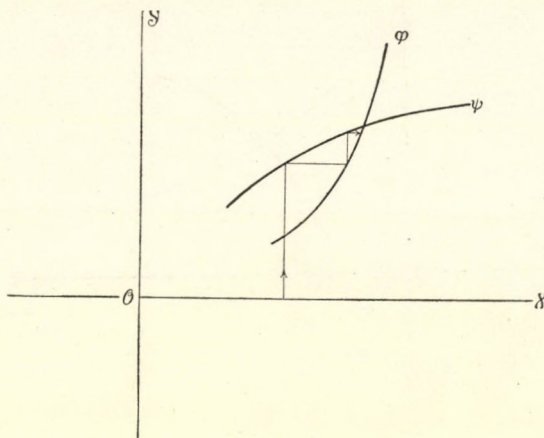
egyenletet az

$$F(x) = 0$$

$$\begin{cases} y = \varphi(x) \\ y = \psi(x) \end{cases}$$

szimultán rendszer alakjában írhatjuk, az egyenlet valós gyökeit a rendszer által meghatározott görbék metszési pontjainak abszcisszái szolgáltatják; ezek a metszési pontok ugyanis az ilyen felbontásoknál invariánsak maradnak.

A lánczgyökök szerint haladó sorbafejtés alap gondolata, hogy a metszési pontokat lehetőleg egyszerűen jellemezhető és



1. ábra.

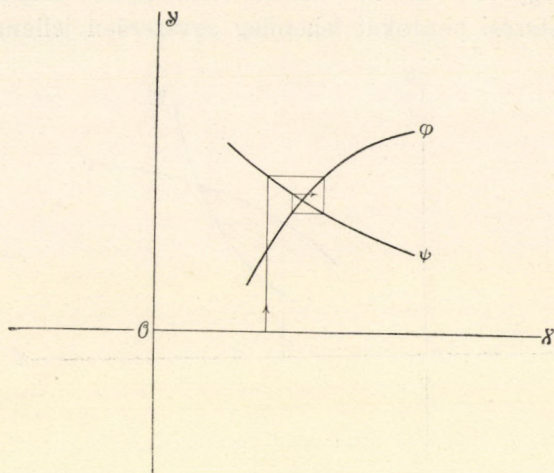
lehetőleg gyorsan konvergáló iterációs folyamattal érjük el. A legegyszerűbb felbontási mód az, melynél az egyik egyenlet lineáris, a legcélszerűbb menetek azok, melyek a metszési pontot a koordinatatengelyekkel felváltva párhuzamos lépcsőzetes vagy spirális darabokkal közelítik meg (l. 1. és 2. ábrát). Konvergencia esetében az eljárás gyorsasága lényegesen függ a kiindulási pont ügyes megválasztásától. Az ilyen előállítások elméleti háttérét a bevezetésben részletezett bő irodalomban találhatjuk meg; ISENKRAHE szemléletes géometriai, NETTO pontosabb analitikai úton állapította meg a szükséges tételek sorozatát. Esetünk tárgyalásánál a következő tételekre szorulunk:

a) Ha a kezdő abszcisszát x_0 -val jelöljük, a keresett gyök kétféle iterációs-folyamattal közelíthető meg, még pedig a k -adik menet formálisan így jellemezhető:

$$x_k = [\psi^{(-1)}\varphi(x_0)]^k \quad \text{ill.} \quad x_k = [\varphi^{(-1)}\psi(x_0)]^k.$$

A menetek a φ -görbén kezdődnek abban az esetben, ha:

$$\varphi'(x_0) < \psi'(x_0).$$



2. ábra.

b) Az $f(x)$ -el jellemzett folytonos és differenciálható iterációs-folyamat akkor konvergál az $x = \xi$ érték felé, ha

$$|f'(\xi)| < 1.$$

(Az $|f'(\xi)| = 1$ eset külön tárgyalandó, az ilyenkor szükséges általánosabb kritériumokra azonban nem lesz szükségünk). A folyamat gyorsasága konvergencia esetében az

$$1 - |f'(\xi)|$$

kifejezés értékétől függ.

c) A menetek jellemzése:

A menet lépcsőzetes a szerint, a mint: $f'(\xi) > 0$ vagy más spirális $f'(\xi) < 0$

alakban a szerint, a mint: $sg\varphi'(x) = sg\psi'(x)$
 $sg\varphi'(x) \neq sg\psi'(x)$

d) «Ha az $F(x) = 0$ egyenletben tetszőleges helyeken x helyébe y -t írva az így nyert $F(x, y) = 0$ egyenlet olyan, hogy alapján úgy x , mint y izoláltan, még pedig a következő alakban:

$$x = g(y), \quad y = h(x)$$

kifejezhető, úgy az eredeti egyenlet összes gyökét konvergens iterációs-folyamatokkal megközelíthetjük; e folyamatok részben a $g(y)$, részben a $h(x)$ függvény alapján képezhetők (ISENKRAHE).»

2. Látni fogjuk, hogy e tételek alkalmazásával a kamatlábfeladat nem triviális megoldása mindig előállítható gyorsan konvergáló menetekkel, melyeknek egyik lényeges tulajdonsága, hogy a *kiindulási abszcisszájuk fix értékkel van megadva*. Ez az utóbbi pontot külön ki kell emelnünk, mivel ez biztosítja, hogy nem kell az adott esethez alkalmazkodó, változó kiindulási ponttal dolgoznunk — mint pl. a sukcesszív approximációs eljárásnál —; e körülménynek a következménye továbbá, hogy a keresett gyökre általánosan érvényes *képletet* szerkeszthetünk.

Mindenekelőtt a B típus egyenletével foglalkozunk, melyet a gyakorlati problémára való tekintettel a következő alakban írunk:

$$z^{n+1} - (e' + 1)z + e' = 0 \quad (e' < n) \quad (5)$$

A felbontás legegyszerűbb alakját nyerjük, ha a HEYMANN dolgozataiban előforduló

$$z = u \sqrt[n]{e' + 1}$$

helyettesítéssel egyenletünket az

$$u^{n+1} - u + c = 0 \quad (5')$$

alakban írjuk, melyben:

$$c = \frac{e'}{(e' + 1)^{\frac{n+1}{n}}} < 1.$$

Ilyen módon a

$$\begin{cases} t = \varphi(u) = u^{n+1} \\ t = \psi(u) = u - c \end{cases}$$

felbontás magasabb rendű parabolát (a kezdőponton át) és 45° -ú hajlásszöggel bíró egyenest eredményez. A triviális megoldáshoz az

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt[n]{c' + 1}} < 1$$

érték tartozik; a nem triviális megoldáshoz tartozó értéket (u_2) az jellemzi, hogy

$$u_2 < u_1,$$

lévén:

$$z_1 = 1 \quad \text{és} \quad z_2 < 1.$$

Ezen értékek létezését a III. fejezetben mutattuk ki. Továbbá belátható, hogy c igen czélszerű általános kezdőérték, mivel két pozitív gyök létezése esetében

$$c < u_2 < u_1.$$

Az első iterációs-folyamat a következő:

$$u_k = [\psi^{(-1)}\varphi(u_0)]^k,$$

vagyis az $u_0 = c$ kezdőabszcissával az u számára a következő lánczgyök-kifejtést kapjuk:

$$u \equiv \text{iter } f(u) = \text{iter } (c + u^{n+1}) = c + \sqrt[n]{c + \sqrt[n]{c + \dots}} \quad (6)$$

a hol még:

$$\nu = \frac{1}{n+1}.$$

FARKAS is foglalkozott az ilyen kifejtések eseteivel¹; a végtelen lánczgyökökre a «Bolyai-féle algoritmus» kifejezést

¹ FARKAS GYULA: «A Bolyai-féle algoritmus» (Ertekezések a matematikai tudományok köréből, VIII. köt. 3. szám 1881, 1—8. o.).

használva. Bolyai Farkas Tentamenjének első kötetében szerepel ugyanis az

$$x^m = a + x$$

egyenletből adódó

$$x = \sqrt[m]{a + x}$$

kifejezés.

A (6)-al értelmezett folyamat lépcsőzetes, mivel

$$\frac{d\varphi}{du} = (n+1)u^n > 0$$

$$\frac{d\phi}{du} = 1 > 0.$$

A lépcsőzetes menetek a parabolán kezdődnek, mivel alkalmazva a III. fejezet segédteételét:

$$\left(\frac{d\varphi}{du}\right)_{u=c} = (n+1) \frac{e'^n}{(e' + 1)^{n+1}} < \frac{n^n}{(n+1)^n} < 1$$

$$\left(\frac{d\phi}{du}\right)_{u=c} = 1.$$

Bebizonyítjuk már most, hogy az $u_0 = c$ választással az első iterációs folyamat konvergens és a nem triviális gyököknek megfelelő u_2 értéket szolgáltatja:

Ha $c = 0$ volna, akkor a folyamat az $u = 0$ gyökhöz vezetne; c folytonos nagyobbodásával a folyamat addig marad konvergens, míg az

$$f'(u) = (n+1)u^n = 1$$

határhoz eljutunk¹, vagyis míg u -ra a következő felső határt elérjük:

$$u = \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{n}}}.$$

Egyenletünk alapján u ezen értékéhez a

$$c = \frac{n}{(n+1)^{\frac{n+1}{n}}}$$

¹ Esetünkben $f'(u)$ -nak csak a pozitív értékei jönnek tekintetbe.

érték tartozik, úgy hogy írható:

$$c_{\max}^n = \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}.$$

Az egyenletünkben szereplő c azonban mindenkor ezen határ alatt marad, mivel a III. fejezet segédtetele alapján — lévén $e' < n$ —

$$c^n = \frac{e'^n}{(e'+1)^{n+1}} < \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}.$$

Mivel pedig

$$c < u_2 < u_1$$

az első folyamattal tényleg az u_2 értéket közelítjük meg; ez abból következik, hogy c -nek a legnagyobb értékéig való nagyobbodásánál a 0-hoz legközelebb eső u értéket approximáljuk.

A konvergencia foka attól függ, hogy az adott esetben a felírt egyenlőtlenségek mennyire vannak kielégítve, végeredményben, hogy az

$$e' < n$$

feltétel milyen mértékben érvényes. Ismeretes, hogy ez gyakorlati feladatok esetében tényleg nagy fokban teljesül is. Geometriailag úgy is mondhatjuk, hogy az egyenesnek az abszcisszáak tengelyével való metszéspontja igen közel fekszik az u_2 -höz tartozó metszési pont abszcissza-vetületéhez. Numerikus munkánál természetesen csak véges számú iteráció fordul elő, a k -adik lépésnél elkövetett hiba mértéke az

$$|y_k - y_{k-1}|$$

kifejezés értékével jellemezhető.

A gyök kiszámításánál a másik folyamat az

$$u = \sqrt[n+1]{-c + \sqrt[n+1]{-c + \dots}}$$

sorra vezetne, ez azonban a $d)$ tétel értelmében nem használható a nem triviális megoldás esetében.

3. Az $A)$ típus ugyanezen úton, de kissé összetettebb alakban tárgyalható. Az

$$x^n - ex + e - 1 = 0 \quad (e > n) \quad (7)$$

egyenletre az

$$x = \frac{1}{z}$$

reciprók tranzformációt alkalmazva a

$$z^n - \frac{e}{e-1} z^{n-1} + \frac{1}{e-1} = 0 \quad (7')$$

alakhoz jutunk. ISENKRAHE könyvében ¹ az általános

$$t^k - p t^l + q = 0$$

esetet tárgyalja, mely az első iterációs folyamattal, vagyis az

$$f(t) = \sqrt[l]{\frac{1}{p}(q + t^k)}$$

alapján a

$$t = \sqrt[l]{\frac{q}{p} + \frac{1}{p} \sqrt[l]{\frac{q}{p} + \frac{1}{p} \sqrt[l]{\frac{q}{p} + \dots}}}$$

lánczgyökhöz vezet. Ez a sor a 0-hoz legközelebb fekvő gyököt közelíti meg, mindaddig, a míg q nagybodásával a

$$q_{max} = \frac{k-l}{l} \left(\frac{lp}{k} \right)^{\frac{k}{k-l}}$$

határt elérjük (újából elhagyva az abszolút értékek jelét).

ISENKRAHE ezen kritériumát (7') egyenletünkre alkalmazván, belátjuk, hogy a folyamat mindenkor konvergens és a nem triviális megoldáshoz tartozó z -értéket állítja elő. Ugyanis:

$$\begin{aligned} a) \quad q_{max} &= \frac{(n-1)^{n-1}}{n^n} \cdot \frac{e^n}{(e-1)^n} > \\ &> \frac{(e-1)^{n-1}}{e^n} \cdot \frac{e^n}{(e-1)^n} = \frac{1}{e-1} \end{aligned}$$

¹ «Das Verfahren der Funktionswiederholung» 68–71. o.

vagyis segéd-tételünk alkalmazása arra vezet, hogy a (7')-ben szereplő abszolút tag mindenkor eleget tesz a szükséges feltételnek.

b) Mivel a nem triviális megoldásra nézve

$$z_2 < 1$$

és a triviális megoldásra nézve

$$z_1 = 1,$$

a z_2 esik a 0-hoz közelebb.

4. Példaképen az előfordulása miatt legfontosabb

$$z^{n+1} - (a_{\overline{n}} + 1)z + a_{\overline{n}} = 0$$

háromtagú egyenletet oldjuk meg; a fix kezdőérték következtében végeredményünket *képlet* alakjában fejezhetjük ki. E formula legelőször HEYMANN dolgozataiban található; úgy hisszük, hogy dolgozatunkban a gyakorlat szempontjából és a képlet alkalmazásához szükséges elméleti háttérrel is megalapoztuk. Képletünk a következő:

$$\frac{1}{r} = \sqrt[n]{a_{\overline{n}} + 1} \left[\sqrt[\nu]{c} + \sqrt[\nu]{c} + \dots \right]$$

a hol:

$$\nu = \frac{1}{n+1} \quad \text{és} \quad c = \frac{a_{\overline{n}}}{(a_{\overline{n}} + 1)^{\frac{n+1}{n}}}.$$

A képlettel való dolgozás részleteit a következő számbeli feladaton mutatjuk be: Adva van

$$a_{\overline{n}} = 21.4821846,$$

vagyis:

$$\nu = \frac{1}{51}, \quad c = 0.897846 < 1.$$

Az u -ra vonatkozó egyenlet:

$$u^{51} - u + 0.897846 = 0.$$

Az iterációs folyamat egyes lépéseit táblázatban állítjuk egybe, minden sorban megadva az illető menet hibáját. A szá-

mitás igen gyorsan történik, ha minden lépésnél az előbbi eredményt figyelembe vesszük és így az új lépésnél csak egy logaritmus kiszámítása és kettő visszakeresése szükséges (c -nek és $\log \sqrt[n]{a_n} + 1$ -nek értékét kis papírszeletre írva, állandóan felhasználjuk).

	$u_k = c + y_{k-1}$	$y_k = \sqrt[n]{u_k}$	Hiba ($y_k - y_{k-1}$)	Kamatláb
u_0 :	0,897846	0,0041049		
u_1 :	0,901951	0,0051797	0,0010748	4,1788
u_2 :	0,903026	0,0055043	0,0003246	4,0550
u_3 :	0,903350	0,0056060	0,0001017	4,0176
u_4 :	0,903452	0,0056384	0,0000324	4,0059
u_5 :	0,903484	0,0056490	0,0000106	4,0021
u_6 :	0,903495	0,0056523	0,0000033	4,0012
u_7 :	0,903498	0,0056536	0,0000013	4,00023
	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots

A kamatláb helyes értéke: 4%.

V. Grafikai módszerek alkalmazása.

1. Az egyenletek grafikai tárgyalása különösen két szempontból történik: vagy olyan első közelítő értékek gyors felkeresése céljából, melyek gyakorlatilag igen megfelelő első tájékoztatást nyújtanak vagy pedig az algebrai tárgyalás részleteinek szemléletes bemutatása céljából. Az egyes eljárásoknak olyanoknak kell lenniök, hogy további összetettebb szerkesztések nélkül is megközelítő grafikai számításoknál alkalmazhatók legyenek. A grafikai módszer gyakorlati használhatóságának vagy heurisztikus értékének adott esetben történő megbecsülése ezekkel az említett mozzanatokkal van meghatározva.

A háromtagú egyenletek grafikai feldolgozására a szakirodalomban a módszerek egész sorozatát találhatjuk. Az

$$u^k - au + a - 1 = 0 \quad (a > 1)$$

egyenlet legprimitívabb grafikai megoldása a következő felbon-
tásból indul ki:

$$\begin{cases} t = u^k \\ t = au - (a-1). \end{cases}$$

E szimultán rendszer első egyenlete a kezdőponton áthaladó k -ad fokú parabolát jellemez, mely mindegyik k -ra nézve egyszerű és mindenkorra megrajzolva képzelhető; a második egyenlet az adott esethez alkalmazkodó egyenest határoz meg. A két alakzatnak a koordinátarendszer első negyedébe eső metszési pontjai érdekelnek, ezek abszcisszáinak leolvasásával nyerjük a pozitív megoldásokat. Az egyik metszési pont mindenkor az $(1, 1)$ pont, a tulajdonképeni feladat tehát a másik metszési pont környezetének $(1-2, \text{ ill. } 0-1)$ elég nagy méretekben való megrajzolása és így e pont elegendő pontos meghatározása. E módszer azonban nagyobb k esetében nem célszerű és dolgozatunkban épen azzal az eljárással fogunk különösen foglalkozni, mely ezen körülményen nagy fokban segít. A bemutatóndó ú. n. *logarithmografikai* módszerrel az algebrai taglalás eredményeit is szemléletes módon fogjuk megállapíthatni. Ezt a pontot azonban már a primitív segédeszközökkel, logarithmikus képek nélkül is elintézhetjük. A grafikai levezetés így alakul:

A parabolának a kezdőponton túl nincsen inflexióspontja és az $(1, 1)$ pontban rajzolt érintőjének iránytangense:

$$\left(\frac{dt}{du} \right)_{u, t=1} = (ku^{k-1})_{u=1} = k.$$

Az egyenes hajlásszögének tangense $= a$, az abszcisszáknak tengelyével való metszési pontjának abszcisszája pedig:

$$(u)_{t=0} = \frac{a-1}{a} < 1.$$

Ezen utóbbi metszési pont tehát — lévén még $a > 1$ — mindig a $0-1$ szakaszon fekszik.

Első tekintetre világos ezen alapon, hogy az $a < k$ típusnál

az egyenes okvetlen átszeli a parabolát még egy pontban, melynek abszcisszája < 1 .

Az $a > k$ eset külön tárgyalandó. Előzetesen be kell látnunk, hogy a $k = 2$ felvétellel az

$$u^2 - au + a - 1 = 0$$

egyenletnek mindkét gyöke pozitív, lévén a számítások elvégzésével:

$$u_1 = 1 \quad \text{és} \quad u_2 = a - 1 > 1.$$

k nagyobbodásával az 1-nél nagyobb abszcisszákhöz tartozó parabolaág mindig meredekebb lesz, de úgy, hogy állandóan átmegy az $(1, 1)$ ponton és érintője itt állandóan az egyenes megfelelő része alatt marad. Ezekből következik, hogy k nagyobbodásával a $k = 2$ esethez tartozó nem triviális metszési pont az egyenesen (mely k -től független) mindjobban közeledik az $(1, 1)$ ponthoz, melyet akkor ér el, ha $k = a$. Ha tehát $a > k$, a nem triviális metszési pont, mindig létezik; mivel pedig a megfelelő ágon inflexió-s-pont nincsen, csak egy ilyen pont van.

(Az $a = k$ határesetben a triviális pozitív megoldás kettős gyököt jelent, a parabola-érintő az $(1, 1)$ pontban összeesik az egyenessel.)

Mivel a gyakorlatban vagy az $a > k$, vagy az $a < k$ eset fordulhat csak elő, a felvetett kérdésre a választ megadtuk.

Idézett magyar dolgozatunkban bemutattuk ennek az eljárásnak alkalmazását a quadrimikus esetben is. A logaritmografikai út előnye abban van, hogy külön megfontolás nélkül a szereplő görbe asszimptotáinak iránya nyújtja a döntő útmutatást.

Kamatlábproblémánk szempontjából a különböző ismeretes grafikai eljárások a következő alapon osztályozhatók: A módszerek a szerint csoportosíthatók, hogy vagy egyszer és mindenkorra kész és az egyes fokszámok szerint számozott (kotírozott) nomogrammot vagy minden fokszámhoz egy-egy külön ábrát használnak. E kettéosztás azért lényeges, mivel problémánknál a fokszám fontos szerepet játszik. A logaritmografikai

lejárásnak, melyet MEHMKE vezetett be az algebrai egyenletek grafikai tárgyalásába, nagy előnye abban lesz, hogy az adott egyenlet alkalmas szétbontása alapján mindkét szempont szerint berendezhető. A többi eljárás sorozatából e helyen a következőket emeljük ki:

a) LALANNE egyszerű eljárását¹, mely mindegyik foksámmal az egyenesek két seregéből álló hálózatot szerkeszt. A probléma algebrai taglalásának eredményeit ugyan igen szemléletesen lehet e módszerrel bemutatni, azonban magasabb fokszám esetén még a MASSAU-tól adott tökéletesebb alakjában sem alkalmas a gyök számítására. Ugyanezek a megjegyzések érvényesek a LALANNE-féle gondolatnak parallel-vonalkoordinátákban történő megszerkesztésére, mely $k=2$ és $k=3$ esetekben kitűnő gyakorlati segédeszköz.

b) A d'OCAGNE-PRÉVOT-féle pontkoordinátás nomogrammot,¹ mely a járadékszámítás problémáit négy változós és egyesített tengelyskálás nomogrammon szemlélteti. A gyakorlati alkalmazás nehézsége, hogy a fellépő görbevonallú függvénykötőket nem lehet egyenes vonalúan anamorfizálni, de első közelítő érték számítására az eredeti ábra igen alkalmas.

c) A TORRÈS-féle módszert,³ melyet problémánk tárgyalására egyszerűen lehetne átalakítani és felhasználni. A megfelelő ábra a tranzlatorikusan mozgatható skálák elvét alkalmazza és a kollineáris nomogrammok sorából való.

2. A *logarithmografikai módszer* alapja, hogy a pontkoordiná-

¹ L. LALANNE régebbi munkáin (különösen «Méthodes graphiques pour l'expression des lois empiriques ou mathématiques à trois variables», Paris. 1878. 41—47. o.) kívül RUNGE könyvében 155—156. o., MASSAU: «Mémoire sur l'intégration graphique» (Ann. de l'Assoc. des Ing. sortis des écoles spéciales de Gand. 1878—1890. III. §. 177), POUSSIN: «Sur l'application des procédés graphiques aux calculs d'assurances» (Bull. trim. de l'Institut. des Act. Franç. XV. 1894. 175. o.), d'OCAGNE: Traité 183—185. és 387. o.

² L. d'OCAGNE: Traité 304—306. o. és SCHILLING: «Über die Nomographie von M. d'Ocagne» (Leipzig. Teubner, 1900.). 34—36. o.

³ I. d'OCAGNE: Traité 366—368. o.

nátás ábrázolásnál a $\log x$ és $\log y$ értékeket vezetjük be x és y helyébe, vagyis hogy a tengelyeket logaritmikusan osztjuk be. Az így nyert függvényképeket *logaritmikus képeknek* nevezzük; ezeket LALANNE használta először. Az algebrai egyenletek és egyenletrendszerek megoldására MEHMKE ezt az ábrázolási módot alkalmazza, még pedig kiaknázva azokat az előnyöket, melyek a «*logaritmikus képek parallel eltolása*» néven ismeretes tételből erednek. Ezt a tételt már REYNOLDS használta 1879-ben,¹ MEHMKE érdeme, hogy a tételnek grafikai alkalmazását lehetővé tette és hogy helyét a gyakorlati algebrában megjelölte.² MEHMKE munkájának főeredménye, hogy igen jól használható eljárást dolgozott ki, a melylyel polinonoknak logaritmikus képét az addicziós — illetve a subtrakeziós — logaritmushorba segítségével könnyen meg lehet szerkeszteni.

A logaritmikus képek módszerének kiindulási pontja az adott egyenlet alkalmas szétbontása; az egyik szétbontásnak megfelelő logaritmikus képet egy fix, a másiknak megfelelő képet egy párhuzamosan eltolható rendszerben függvénykötőkkel ábrázoljuk. Az adott esetnek a mozgatható rendszer egy «beállítása» felel meg a fix rendszerre vonatkozólag és az egyenlet gyökeit a beállítás után leolvasható kétféle függvénykötők metszési pontjainak abszcisszái adják, még pedig a fix tengelyen történő leolvasással. A trinomikus egyenlet esetében a szétbontás kétféleképen történhetik. Az egyenlet mindig a következő alakban írható:

$$u^n \pm pu \pm q = 0$$

és a következő két szétbontásra vezet:

$$\left. \begin{array}{l} t = u^n \\ t = \mp pu \mp q \end{array} \right\} \text{I.} \quad \left. \begin{array}{l} t = \mp pu \\ t = u^n \pm q \end{array} \right\} \text{II.}$$

A mozgatható rendszerben a szétbontások második egyen-

¹ Philos. Transact. 1879. II. rész 753. o. (MEHMKE tanár úrnak levélbeli közlése alapján idézve.)

² L. a bevezetésben összeállított irodalmi forrásokat.

letének megfelelő logaritmikus képet szerkesztjük meg; látjuk tehát, hogy I-nél ez a fokszámtól független és így egyszer és mindenkorra megszerkeszthető, II-nél azonban minden foksámhoz külön-külön megrajzolandó. I. a kamatlábprobléma algebrai taglalásának szemléltetésénél, II. a megfelelő nem triviális gyök grafikai meghatározásánál fog czélszerűnek bizonyulni.

Mindenekelőtt tehát a «beállítás» módjával kell foglalkoznunk. Esetünkben a parallel-eltolásra vonatkozó tételt a következő legegyszerűbb alakjában fogjuk felhasználni. Az

$$a_1 u^{m_1} + a_2 u^{m_2}$$

kifejezés logaritmikus képét az

$$u^{m_1} + u^{m_2}$$

kifejezés logaritmikus képéből akként lehet előállítani, hogy a második kép koordinátatengelyeit egy fix rendszer tengelyeivel párhuzamosan megfelelően elhelyezzük. Ez a beállítás az ú. n. «irányító egyenesek» (droites de repère) útján történik: a mozgatható rendszer kezdőpontját ezeknek az egyeneseknek a metszési pontjába helyezzük. Az irányító egyenesek a fix ordináta-tengelyen alkotott szeleteikkel (ezek végpontjai a logaritmikusan beosztott ordináta-tengelyen az a_1 , illetőleg az a_2 számmal birnak) és iránytangenseikkel (m_1 , illetőleg m_2) vannak meghatározva.

Ezeknek az általános megjegyzéseknek előrebocsátása után alkalmazzuk a kétféle szétbontást a kamatlábprobléma

$$u^k - au + a - 1 = 0 \quad \begin{cases} A) & a > k; \quad k = n, \quad u = x \\ B) & a < k; \quad k = n+1, \quad u = z \end{cases} \quad a > 1, \quad k > 1$$

két legfontosabb egyenletére.

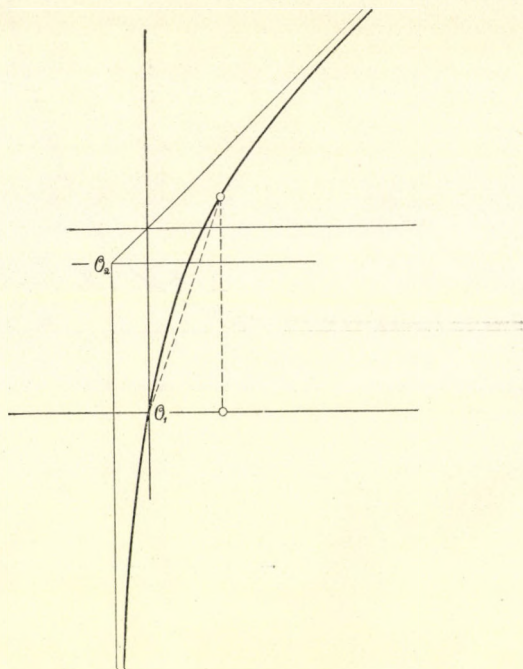
Az I. szétbontással a következőket nyerjük:

a) a fix rendszerben a kezdőponton (O_1) átmenő sugársort, melynek sugarai a k (iránytangens) szerint vannak számozva;

b) az eltolható rendszerben az $(u-1)$ kifejezés logaritmikus képét, mely МЕНМКЕ módszerével szerkeszthető meg. E képpel adott görbének egyrészt a negatív ordinátatengely, más-

részt a 45° -u hajlással bíró és az első quadransba eső, a kezdőponton (O_2) áthaladó félsugár az asszimptotái.¹

c) Az eltolható rendszer beállítása úgy történik, hogy az irányító egyenesek a fix ordinátatengelynek a -val, illetőleg $(a-1)$ -el számozott pontjain haladjanak át és hogy iránytangensük 1, illetőleg 0 legyen (l. 3. ábrát.).



3. ábra.

E szétbontást az algebrai taglalás eredményeinek szemléltetésére a következő két egyszerű megjegyzés alapján használhatjuk:

1. Az $(u-1)$ kifejezés *logaritmikus képe a beállítás után a fix rendszer kezdőpontján halad át.*

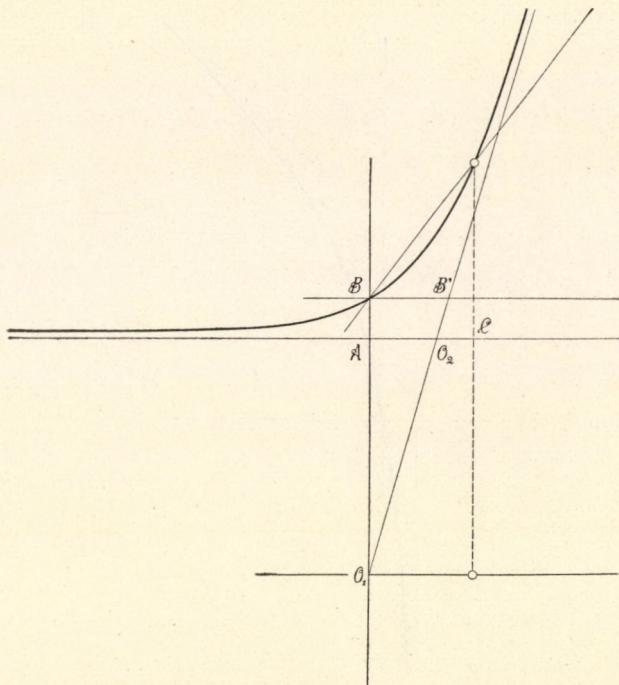
¹ A mozgatható rendszert legcélszerűbben átlátszó milliméter-papíron szerkesztjük; a szükséges ismeretek dolgában l. d'OCAGNE: *Traité* V. §. 140 (383—385. o.). A sugársorból csak az adott esetben szükséges sugarat kell megrajzolni.

Bizonyítás: Mivel a logaritmikus képeket a

$$\log u = x, \quad \log t = y$$

anamorfozis szolgáltatta, a mozgatható kép egyenlete az (x, y) rendszerben :

$$10^y = a10^x - (a - 1),$$



4. ábra.

mely egyenlet az $x, y=0$ értékekkel ki van elégítve. Ez a megjegyzés voltaképen azt a körülményt fejezi ki, hogy $u=1$ mindig gyöke az eredeti egyenletnek.

2. Az $(u-1)$ kifejezés logaritmikus képének pozitív ága az A), negatív ága a B) típus egyenletéhez tartozik.

Bizonyítás: A kép irántangense az $x, y=0$ pontban :

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)_{[0,0]} = (a10^{x-y})_{[0,0]} = a;$$

ha tehát $a > k$, a nem triviális metszési pont az X -tengely felett, ha $a < k$, az X -tengely alatt fekszik.

Mivel $k > 1$, a nem triviális metszési pont mindkét típusnál mindenkor létezik (még pedig $x > 1$, $z < 1$); $k = 1$ a kép egyik asszimptota irányát jellemezné.

3. Egy első közelítő nem triviális gyök grafikai számításánál az I. szétbontás czélszerűsége abban volna, hogy a mozgatható kép a fokszámtól függetlenül, egyszer és mindenkorra megszerkeszthető. Az alkalmazás fő nehézsége azonban, hogy az irányító egyenesek kitűzésénél használt két ordinátpont [volta-képen $\log e$ ill., $\log(e-1)$] igen közel fekszik egymáshoz; ennek okát abban kell keresnünk, hogy a kérdéses gyök értéke igen kevéssel tér el az egységtől. Ezen a körülményen a rajz tekintetbe jövő részének megfelelő *nagyításával* lehet segíteni; e nagyítás-művelet azonban csak a negatív ág esetében vezet czélhoz. A II. szétbontás ezzel szemben alkalmasabb a gyök grafikai meghatározására, mivel az említett nagyítás mindkét típus esetében egyenlően alkalmazható. Igaz, hogy ennél a módszernél a mozgatható kép nem független a fokszámtól úgy, hogy adott esetben a МЕНМЕ-féle eljárás alapján mindenkor külön megszerkesztendő.

A II. szétbontás részleteit a 4. ábra vázlatosan szemlélteti; ebben az esetben a következőket nyerjük:

a) a fix rendszerben 45° -ú hajlásszöggel bíró egyenesek seregét, melyek az a -val számozott ordinátpontokon (B) haladnak át (adott esetben csak a megfelelő egyenest kell megrajzolni);

b) az eltolható rendszerben az

$$u^k + a - 1$$

kifejezés logaritmikus képét, melynek egyik asszimptotája k iránytangenssel bír és másik asszimptotája vízszintes irányú.

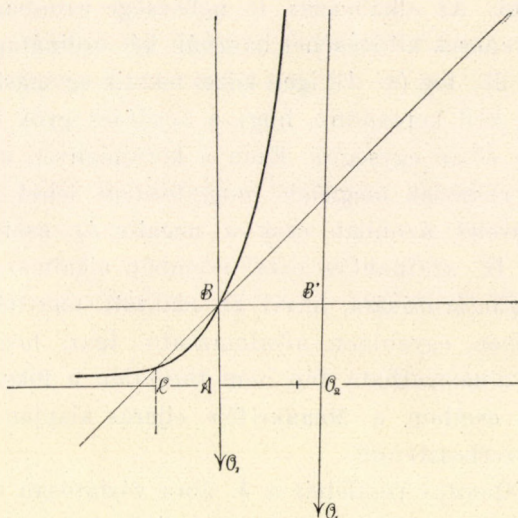
c) a beállítás úgy történik, hogy a mozgatható kép egyik asszimptotája átmenjen a fix rendszer kezdőpontján (O_1) és másik asszimptotája átmenjen a fix ordináta tengelynek $(a-1)$ -el számozott pontján (A).

A nagyításnál O_1 -et nem kell ismerni (a mi magasabb fokszám esetében igen előnyös), mert a szükséges pontokat a következő képletek alapján tűzhetjük ki:

$$\overline{AO_2} = l \frac{\log(a-1)}{k}$$

$$\overline{BB'} = l \frac{\log a}{k}$$

(a hol l a nagyítás faktora).



5. ábra.

Az A) típus esetében a két kép metszési pontja a fix ordináta-tengelytől jobbra (l. 4. ábrát), a B) típusnál ettől balra (l. 5. ábrát) fekszik.

Az 5. ábrában a IV. fejezet számbeli példájának grafikai kidolgozását mutatjuk be 50-szeres nagyításban. A megoldás:

$$\overline{AC} = l \log \frac{1}{r}^1.$$

Goldziher Károly.

¹ A dolgozat ábráinak megrajzolását KLEIN Dezső, műegyetemi hallgató úr szíveségének köszönöm.

EGY EGYENLŐTLENSÉG AZ ARITMETIKAI KÖZÉPÉRTÉKRŐL.

Bebizonyítjuk a következő tételt:

Ha bárhány valós szám két pozitív korlát közé esik, akkor e számok számtani közepének, és reciprok értékük számtani közepének szorzata nem lehet nagyobb, mint e két korlát számtani közepének és e két korlát reciprok értéke számtani közepének szorzata. Vagyis, ha

$$0 < m \leq t_i \leq M, \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

akkor

$$z = \frac{t_1 + t_2 + \dots + t_n}{n} \cdot \frac{\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \dots + \frac{1}{t_n}}{n} \leq \frac{M+m}{2} \cdot \frac{\frac{1}{M} + \frac{1}{m}}{2}. \quad (1)$$

Tekintsük egy pillanatra a t_i kivételével az összes t -ket állandóknak és vizsgáljuk meg, hogy az (m, M) köz melyik t_i helyén veszi fel a

$$z = f(t_i) = \frac{1}{n^2} (t_i + A) \left(\frac{1}{t_i} + B \right)$$

függvény a legnagyobb értékét.

Minthogy a $z = f(t_i)$ -nek differenciálhányadosa

$$\frac{dz}{dt_i} = \frac{1}{n^2} \left(B - \frac{A}{t_i^2} \right)$$

csak a

$$t_i = \sqrt{\frac{A}{B}}$$

helyeken tűnik el és itt a z -nek minimuma van, azért az (m, M)

közben vagy ott van a z -nek a legnagyobb értéke, a hol $t_i = M$, vagy ott, a hol $t_i = m$, még pedig aszerint, a mint

$$\frac{1}{n^2} (M + A) \left(\frac{1}{M} + B \right) \geq \frac{1}{n^2} (m + A) \left(\frac{1}{m} + B \right),$$

vagyis

$$A \frac{M+m}{Mm} \geq B.$$

Bármekkora is legyen A és B , azaz bárhogyan is választottuk $t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_n$ -et, ha azt akarjuk, hogy z maximális legyen, a még tetszésünktől függő t_i -t vagy M -nek, vagy m -nek fogjuk választani, aszerint, amint

$$A \frac{M+m}{Mm} \geq B.$$

Ezt a megfontolást minden t -re elvégezhetjük és így a maximális z így alakban lesz írható:

$$z_{\max} = \frac{1}{n^2} [aM + (n-a)m] \left[\frac{a}{M} + \frac{n-a}{m} \right],$$

ahol a az M -mel, $(n-a)$ a m -mel egyenlő értékű t -nek számát jelenti.

A z_{\max} -ra kapott kifejezést a következő alakban is írhatjuk:

$$z_{\max} \leq \frac{M+m}{2} \cdot \frac{\frac{1}{M} + \frac{1}{m}}{2} - \frac{1}{n^2} \left(\frac{n}{2} - a \right)^2 \frac{(M-m)^2}{Mm}.$$

Miután a jobboldali levonandó pozitív, azért valóban

$$z_{\max} \leq \frac{M+m}{2} \cdot \frac{\frac{1}{M} + \frac{1}{m}}{2}.$$

Ezzel be van bizonyítva az (1) egyenlőtlenség.

Az $=$ jel lesz érvényes, ha n páros és $a = \frac{n}{2}$, azaz ugyanannyi t egyenlő m -mel, mint M -mel.

Ezt az egyenlőtlenséget felhasználhatjuk egy a reciprokok függvények integráljára vonatkozó felső határnak a megállapítására.

Tekintsük ugyanis a t_1, t_2, \dots, t_n számokat úgy, mint egy mindenütt pozitív $t = f(x)$ függvény x_1, x_2, \dots, x_n æquidistans osztáspontjaihoz tartozó függvényértékeket. Ekkor (1) baloldala:

$$\frac{1}{n} [f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)] \cdot \frac{1}{n} \left[\frac{1}{f(x_1)} + \frac{1}{f(x_2)} + \dots + \frac{1}{f(x_n)} \right]$$

úgy tekinthető, mint a

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \cdot \frac{1}{b-a} \int_a^b \frac{dx}{f(x)} \quad (2)$$

szorzatnak a közelítő értéke. Ha pedig az (1)-ben a limesre térünk át, akkor nyerjük, hogy

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n^2} (f(x_1) + \dots + f(x_n)) \cdot \left(\frac{1}{f(x_1)} + \dots + \frac{1}{f(x_n)} \right) \right] &\leq \\ &\leq \frac{M+m}{2} \cdot \frac{\frac{1}{M} + \frac{1}{m}}{2}, \end{aligned}$$

a hol most m, M az (a, b) számközbeli $f(x)$ függvényértékeknek egy-egy alsó, illetve felső pozitív korlátját jelenti.

A baloldalt a (2) integrálos kifejezéssel helyettesítve:

$$\frac{1}{(b-a)^2} \int_a^b f(x) dx \cdot \int_a^b \frac{dx}{f(x)} \leq \frac{M+m}{2} \cdot \frac{\frac{1}{M} + \frac{1}{m}}{2}.$$

Ebből

$$\int_a^b \frac{dx}{f(x)} \leq \frac{(b-a)^2}{\int_a^b f(x) dx} \cdot \frac{M+m}{2} \cdot \frac{\frac{1}{M} + \frac{1}{m}}{2}.$$

Ha ezenkívül még tekintetbe vesszük, hogy

$$\int_a^b \frac{dx}{f(x)} \geq \frac{(b-a)^2}{\int_a^b f(x) dx},$$

a mint az például a SCHWARZ-féle:

$$\int_a^b \varphi^2 dx \int_a^b \psi^2 dx \geq \left(\int_a^b \varphi \psi dx \right)^2 \quad (\varphi \geq 0, \psi \geq 0)$$

egyenlőtlenségből

$$\varphi = \sqrt{f(x)}, \quad \psi = \frac{1}{\sqrt{f(x)}}$$

helyettesítéssel következik, akkor írhatjuk, hogy

$$\frac{(b-a)^2}{\int_a^b f(x) dx} \leq \int_a^b \frac{dx}{f(x)} \leq \frac{(b-a)^2}{\int_a^b f(x) dx} \cdot \frac{M+m}{2} \cdot \frac{\frac{1}{M} + \frac{1}{m}}{2}. \quad (I)$$

A

$$\frac{M+m}{2} \cdot \frac{\frac{1}{M} + \frac{1}{m}}{2} = \left(\frac{\frac{M+m}{2}}{\sqrt{Mm}} \right)^2$$

tényező, szóval m és M számtani és mértani közepei viszonyának a négyzete, elég közel esik 1-hez, ha M nem sokat különbözik a m -től, mikor is az $\int_a^b \frac{dx}{f(x)}$ integrál elég szűk határok közé van szorítva.

Az (I) képlet reciprok függvények integráljának megközelítő kiszámítására is alkalmas, ha t. i. helyette a nyert alsó és felső korlátnak számtani közepét, a melynek értéke

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{(b-a)^2}{\int_a^b f(x) dx} \left[\frac{(M+m)^2}{4Mm} + 1 \right],$$

veszszük számításba. A δ hiba, a mit elkövetünk abs. értékre kisebb a két korlát különbségének a felénél:

$$|\delta| < \frac{(b-a)^2}{\int_a^b f(x) dx} \cdot \frac{1}{4} \left(\frac{m^2 + M^2}{2mM} - 1 \right). \quad (\text{II})$$

Alkalmazható ez a képlet logaritmusok közelítő kiszámítására. Az $f(x) = x$ helyettesítéssel a (II)-ből megfelelő egyszerűsítések után kapjuk, hogy $l \cdot (x+1)$ helyett

$$l \cdot x + \frac{2}{2x+1} \left(1 + \frac{1}{8x(x+1)} \right) \text{-et}$$

véve számításba, a hiba abszolút értéke

$$|\delta| < \frac{1}{4x(x+1)(2x+1)}.$$

Azaz, ha a term. logaritmust ezen módon számítjuk, a hiba, a mit elkövetünk $x = 10$ -től kezdve, kisebb mint

$$\frac{1}{4 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 21} = \frac{1}{9240}$$

20-tól kezdve kisebb, mint

$$\frac{1}{4 \cdot 20 \cdot 21 \cdot 41} = \frac{1}{68,880}.$$

Schweitzer Pál.

AZ ELEKTROMOS FESZÜLTSG TÁVOLBÓL VALÓ MÉRÉSÉRŐL, KONTAKTUS NÉLKÜL.

Ha valamely elektromosan töltött test és egy zérus potenciálú izolált vezető közötti légtér erősen ionizálunk, egyrészt az erővonalak normális helyzete megzavarodik, másrészt pedig töltésvándorlás áll be a töltött testről a zérus potenciálú felé. A jelenség következtében az izolált vezető csakhamar bizonyos valószínű fesszültséget nyer, melynek értéke magasabb, mint a milyen hasonló körülmények között, de normális levegőben volna.

Ha a vezető úgy van berendezve, hogy az áramot továbbíthassa, a vele vezetőleg összekötött elektrométeren leolvasott értékekből következtetni lehet a távolba helyezett s bizonyos potenciálra töltött test elektromos fesszültségére.

Az elektrométeren közvetlenül leolvasott fesszültség értéke és az egyensúly elérésére szükséges időtartam a távolba helyezett s feltöltött test potenciálján kívül még attól a távolságtól is függ, a mely a töltött testet a felfogótól elválasztja. Függ továbbá az ionizáció következtében létrejött áram intenzitásától, a mérő berendezés kapacitásától és végül az áram erősségének a mérőrendszer elektromos veszteségéhez való viszonyától — minden egyéb körülményt állandónak tételezván fel.

Az ezen körülményeket uraló törvényszerűségek elemeit CHILD,¹ ZELENY² és RUTHERFORD³ nagyjában megállapították.

¹ CHILD: Phys. Rev. 12. l. (1901.)

² ZELENY: London Phil. Trans. A. 193. l. (1901.)

³ RUTHERFORD: Phil. Mag. 210. l. (1901.)

A jelenséget tanulmányozva ezeket némileg bővítettem, minek eredményeül sikerült egy olyan gyakorlati mérőberendezést szerkesztenem, melynek segítségével az elektromos feszültség bizonyos távolságból, vezető sodronyok és kontaktus nélkül meg lehetős pontossággal megmérhető.

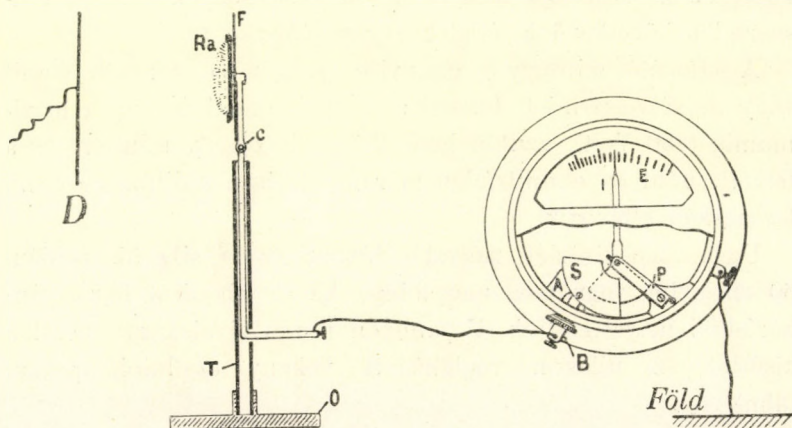
A berendezés elve.

Egy erősen radioaktív anyaggal bevont fémkorong egyidejűleg az ionizálás létesítésére és a töltés felvételére szolgál.

Izoláló anyagból készült állványra helyezve össze van kötve egy kicsiny kapacitású s közvetlenül voltokban leolvasható elektrométerrel, mely így minden időpillanatban jelzi a fémkorong nívója és a föld közötti potenciálkülönbséget.

A berendezés leírása.

A «felfogó» ernyőjét képező, rádiummal bevont fémkorong átmérője 48 mm. Az alkalmazott rádium aránylag csekély mennyiségű, de igen tiszta rádiumvegyület. A korong egy nagyobb fémlemezbe *F* van becsavarva, (1. ábra) melynek átmérője



1. ábra.

90 mm. Ez a fémlemez pedig egy fémrúdra van erősítve, melyen *C* sarok körül vízszintes tengelyen elforgatható.

A fémrúd egy 180 mm magas *T* ebonitsőbe van beágyazva, mely izoláló állványul szolgál. Az egészet *O* fémállvány hordja. A *C* fémrúd alsó vége finom fémfonál segítségével (mely több méter hosszú lehet) az elektrométer sarkcsavarával van vezetőleg összekötve. Ez az elektrométer, melyet már előbb részletesen ismertettem,¹ főként kis dimenzióiért említésre méltó, továbbá azért is, mert szilárd, merev tüje van, mely közvetlenül Voltokban leolvasható skálán mozog, úgy, hogy a műszer leolvasása és kezelése semmivel sem komplikáltabb, mint valamely közönséges voltméteré. Az elektrométer kapacitása körülbelül 6 elektrosztatikus egység (*cm*), az egész berendezés,² a fém-sodronyét ide nem értve, mintegy 15 elektrosztatikus egység.

A berendezés működése.

A «felfogóból» és a vele mintegy 50 cm hosszú sodronnyal összekötött elektrométerből álló berendezést lehetőleg szabadon, azaz minden tárgytól távol kell felállítani, úgy, hogy sem a felfogó, sem a sodrony közelében mintegy 15 cm-nél közelebb ne legyenek tárgyak. Ilyen körülmények között a műszerrel a következő kísérletek végezhetők:

A felfogótól mintegy 30 cm-nyire gyengén megdörzsölt ebonit vagy pecsétviaszrudat tartunk: a tű azonnal kileng a maximumig (350 Volt), azután lassanként visszaesik, miután úgy a felvett, mint az ebonitrúdon maradt töltés a rádium hatására lassacskán eltávozik.

Ugyanezen kísérlet nagyobb távolságra is sikerül, például 60 cm-nyire, vagy még nagyobbra, ha az ebonitot borostyánkőrúddal helyettesítjük. Ugyanilyen rendű távolságra sikerül a kísérlet az ujjakon végighúzott vékony celluloidlapokkal (film) is.

¹ SZILÁRD: Comptes Rendus 157. 768. l. (1913.)

² Konstruálta a «Société d'Appareils de Mesures» Parisban.

Egy kis elektromozó gép egyik polusát a földdel összekötve a kísérlet néhány méternyi távolságra is sikerül. Végre a jelen-ség a RUHMORFF-féle induktorral, vagy más magas feszültségű transzformátorral is észlelhető, ha az áramot valamilyen módon egyenárammá alakítjuk.

A közönséges bőrből való gépszíjak elektromozódása a ke-rekeken való csúszáskor, néha 1 m vagy nagyobb távolságból is kimutatható. Ugyanez áll az olyan ipari gépekre is, melyek-nek mozgó részei izoláló anyagból készültek (kaucsuk, ebonit, lakk), a milyenek pl. a fonó-szövőiparban meglehetősen nagy számban alkalmaztatnak.

Érdekes kísérlet vrgezhető a berendezéssel még úgy is, hogy valamilyen nagyobb kapacitású testet elektromozva és a fel-fogótól bizonyos távolságba helyezve, az elektrométer tűjét ki-téritjük. Azután a felfogó és a test közé fémlapot iktatunk: a tű legott visszaesik, mert az áram útjában akadály állott be.

Egyébként a tű kitéritése aránylag jelentékeny távolból néha nem várt eszközökkel is sikerül. Így az ujjak között végighúzott száraz papirlap, széthúzott selyem vagy gyapjúrostok egyaránt létrehozák, néha több decziméternyi távolságból.

A fonógyárakban, a hol a rostok széthúzását és csavarását gépek végzik nagy sebességgel, elegendő a terembe belépni a műszerrel, hogy a tűje máris kilengjen.

Számbeli értékek.

Ha D fémlapot (átmérője 160 mm) különböző potenciálú állandó áramforrással (akkumulátorok) kötjük össze és a távol-ságot a lemez és a felfogó között változtatjuk, az elektrométer a következő értékeket adja:

D lemez pozitív 950 Voltra töltve:

Távolság centiméterekben D és a felfogó között	Az elektrométeren közvetlenül leolvasott Volt-szám
15	705
20	500
25	380
30	315
35	275
40	250
100	45

A D lemez és a felfogó közötti távolság állandóan 30 centiméter.

A pozitív töltésű D lemez feszültsége Voltokban	Az elektrométeren leolvasott potenciát Voltokban
950	315
750	255
550	195
350	130
150	50

Mint az adatokból látjuk, 50 cm-nyire a megfigyelés alá vett testtől, feszültségének még körülbelül $1/3$ -át, 100 cm-nyire pedig $1/20$ -át tudjuk közvetlenül észlelni. Ez a körülmény, a míg egyrészt a méréseknek nagy biztosságot ad, másrészt a mérés határait rendkívül kiterjeszti.

A *D* fémlemez méreteit megváltoztatva, az eredmények is megváltoznak. Így a megméréendő testtől 25 cm-nyire az elektrométer 300 Voltot mutat, ha a *D* lemez átmérője 160 mm és állandó töltése 750 Volt. Ez az érték 240-re esik, ha a lemez (*D*) átmérőjét 94 mm-re redukáljuk. Vagy pedig: 30 cm távolságra, egyébként ugyanazon körülmények között a nagyobbik *D* lemezzel 255 Voltot mutat az elektrométer, míg a kisebbik *D* lemez esetén a feszültség 200 Voltra esik.

A mérések aránylag meglepő pontossággal végezhetők. Két százalék átlagos hibával megismételhetők.

A fenti értékek 1/10 milligramm rádiumbromiddal, mely egy 28 mm átmérőjű lemezre egyenletesen volt elosztva, érettek el. Ez a mennyiség elegendő arra, hogy az egyensúly a mérőrendszer és mérendő test között mintegy 2 másodperc alatt beálljon. Az elektrométer tűje teljesen aperiodikus, úgy hogy a leolvasás azonnal, Voltokban, fennakadás nélkül állandóan végezhető.

A kísérleteknél előnyös a *D* lemezt pozitív elektromossággal tölteni, hogy a felfogóból esetleg eltávozó emanáció aktív termékei reá ne rakódjanak.

Ha a felfogó rádium-ernyőjét vékony lemezzel fedjük be, mely az összes alfa részecskéket visszatartja, az elektrométer jelzései alig szenvednek észrevehető változást. A jelenség tehát csaknem kizárólag a beta és a gamma sugaraknak tudható be.

A műszer gyakorlati alkalmazása.

A fenn leírt módszer és berendezés sikerrel alkalmazható magas feszültségű áramok mérésére, annyiival is inkább, mert a vezetővel való kontaktusból háramló veszélyt teljesen kizárja. Így szabadban lévő légvezetékeken mérések végezhetők a nélkül, hogy hozzájuk kellene nyulni. Esetleges, nagyobb feszültségű áramok vezetékeinél létező veszteségek pontos helyei a műszerrel könnyen felkutathatók.

Végül, a módszer lehetővé teszi elektromos szigetelők feszültségének, továbbá mozgó vagy forgó testek elektromos feszültségének megmérését, tehát olyan esetekben, mikor egyébként kontaktus a mérés céljából nem volna létesíthető.

Páris, 1914 február 15.

Szilárd Béla.

PHYSIKAI SZEMLE.

H. Rukop és J. Zenneck: Nagy frekvenciájú áram transzformálása a frekvencia háromszorosára. Phys. Zeitschr. 13. 953 l. (1912) és 15. 145 l. (1914).

DUDDEL fedezte fel, hogy egyenáramú ívlámpa pólusaihoz rezgéképes sűrítőkört kapcsolva, csillapodás nélküli rezgéseket állíthatunk elő, a melyek a drótnélküli telegrafálás körében igen előnyösen alkalmazhatók. ZENNECK a váltakozó áramú ívlámpa azon sajátosságát használja a rezgésszám növelésére, a mely abban áll, hogy az ív áramkomponensei között a primér áramhoz képest háromszoros frekvenciájú a többihez képest igen erős. Ezt erősítik a szerzők az ívlámpa szeneihez kapcsolt másodlagos rezonáló áramkörrel és keresik, hogy mily viszonyok között sikerül a primér áram energiájának lehető nagy mennyiségét a háromszoros frekvenciájú áram energiájába áttranszformálni.

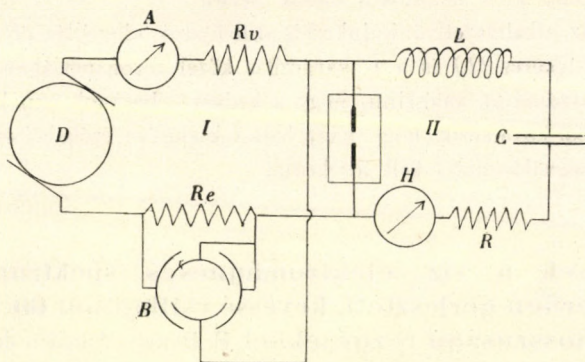
A primér áramot nagyfrekvenciájú (4000/sec. és 8000/sec.) dinamógép (*D*) (l. 2. ábra) szolgáltatta, melynek árama Rv indukciós vagy ohmos ellenálláson át fut az ívhez. A primér (*I*) áramkörbe *A* ampèremeter, *Re* indukciónélküli ellenállás és egy bináns-elektrometer ¹ van bekapcsolva az áramintenzitás, ill. utóbbi a teljesítmény mérésére.

Az ív vízhűtötte szénkamrában égett szénelektrodok között. Az ív sarkairól van leágaztatva a rezonáló áramkör (*II*), a mely *L* változtatható önindukciós tekercsből, *C* változtatható kapacitású kondenzátorból, egy indukciónélküli ellenállásból *R*, és *H* hődrótos ampèremeterből állt, Ezen áramkör saját rezgése az *L* és *C* változtatásával változtat-

¹ Bináns-elektrometer a «quadráns» elektrométernek oly változata, mely két álló és két lengő félkör kölcsönhatása alapján jelzi az elektromos töltést.

ható, a mikor is ez az ívlámpa áramának azon komponensét erősíti, a mely vele rezonanciában van. Itt mindig úgy volt beállítva, hogy ha N a primér áram frekvenciája, akkor $3N$ volt a II áramkör saját rezgése.

Szerzők mérték az I. és II. áramkör teljesítményét és keresték, hogy miképen kell megválasztani az ívlámpa légkörét, az I. ill. II. áramkörbe kapcsolt indukció, indukció nélküli ellenállásokat és a C kapacitást, hogy a háromszoros frekvenciára transzformált áram teljesítménye lehető nagy legyen. Mivel az I. áramkör áramának egy része belemegy a II. áramkörbe, ezt a II. áramkör teljesítményéből le kell vonni, a mit egy harmadik rezonáló áramkör segélyével — mivel ezen áram rezgés-



2. ábra.

száma N volt és így el lehetett választani a $3N$ rezgésszámú transzformált áramtól — külön meghatároztak.

Az észlelések szerint, ha az ív levegőben ég, a transzformált energiamennyiség viszonya a primérhez fordítva arányos a primér áram erősségével és a mint a primér áramkörbe iktatott R_v ohmos ellenállásokat változtatjuk, más és más széntávolságnál éri el maximumát. Mivel az ív hidrogén, hidrogén és benzol légkörben kevésbé volt állandó és kedvező hatások csak az egyes tényezők kisebb intervallumában volt elérhető, azért a későbbiekben állandóan levegőben égették az ívet.

Úgy a 4000, mint a 8000 frekvenciájú primér áram mellett az tapasztalták, hogy a feltranszformált áram hatások a tápláló áram kisebbitésével és az ív rövidítésével éri el a maximumot. De míg a 4000 frekvenciájú tápláló áram esetén a hatások egy bizonyos indukció-

nélküli ellenállás mellett éri el maximumát, a mely maximum az alkalmazott legnagyobb C mellett volt a legnagyobb, addig 8000 frekvencia alkalmazása mellett a hatásfok akkor is elérte közel a maximumot, ha indukciós ellenállás volt a primér áramkörbe kapcsolva és minél kisebb volt a rezonanciakörbe kapcsolt C kapacitás, annál nagyobb megterhelést bírt el a primér áramkör a hatásfok csökkenése nélkül. Ennek gyakorlati fontossága abban van, hogy az ív ekkor sokkal állandóbban ég és a primér áramerősség és ívhossz kellő megválasztása mellett a hatásfok még fokozható.

A legkedvezőbb hatásfok, melyet a szerzők a 4000 frekvenciás árammal elő tudtak állítani, 49% volt, míg a 8000 frekvenciás árammal legfeljebb 41% hatásfokot tudtak elérni.

Mivel az alkalmazott önindukciós szabályozó ellenállás (R_v) az önindukciós tekercs (L) és a C kapacitás közel rezonanciában voltak a gép rezgésszámával, valószínű, hogy a kedvező hatásfok ennek köszönhető, a miből következik, hogy nagy hatásfok elérése céljából ezen rezonancia megvalósítására kell törekedni.

Gyulai Zoltan.

Mérések a víz elektromágneses spektrumában, lökészerűen gerjesztett, kevésbé csillapított 60–20 cm hullámhosszúságú rezgésekkel. H. RUKOP: Annalen der Physik 42. 489. 1913.

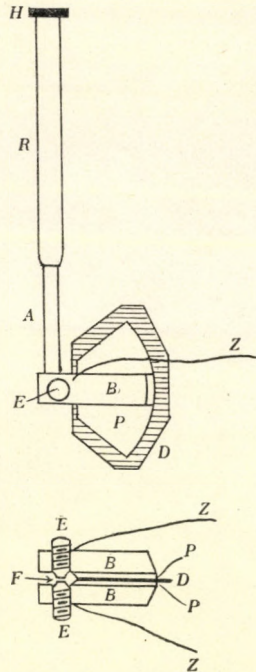
Valamely folyadék (abszorpciós) spektruma meg van határozva, ha a törésmutatónak és absorptio koefficiensnek a hullámhosszal való változását ismerjük; ha a szóbanforgó hullámok elektromos rezgésekből erednek, az illető anyag elektromágneses spektrumáról beszélünk, ez tehát kb. 2 mm-től (az előállítható legrövidebb elektromos hullámtól) a végtelen nagy hullámhosszig terjedő tartományt foglalja magában.

A víz elektromágneses spektrumát mindenekfelett érdekessé teszi az a körülmény, hogy a víz dielektromos állandója 81 lévén, törésmutatója igen nagy hullámokra az $n^2 = \epsilon$ összefüggésnek megfelelően 9; a látható spektrumban pedig 1, 3, tehát olyan nagy értékek közt változik, mint semmiféle más anyagé; az eddigi igen nagy számú rá vonatkozó mérés eredményei azonban egymástól igen eltérők. RUKOP méréseit az eddig is használt módszerrel, a DRUDE-LECHER-féle berendezéssel végzi: t. i. meghatározza két párhuzamosan kifeszített drótban keltett állóhullámok hullámhosszát levegőben és vízben: a kettő hányadosa a

törésmutatóval egyenlő; a vizsgált tartományban észrevehető abszorpcziót nem talált. A lényegében véve G. MIE-től származó oszcillátor berendezését, a mely az eddigiektől tetemesen különbözik, a mellékelt 3. ábra oldalnézetben és keresztmetszetben mutatja. P két quadransalakú rézlemez, közöttük a 0.2 mm vastag D ebonitlemezzel; a rájuk forrasztott B rézpántokban finoman beállítható E rézcsavarok elülső, sík felületei között jön létre a 0.02 ... 0.6 mm szikra, Z , Z az induktoriumhoz vezető drótok. A hatásos rezgések az A antennákban jönnek létre, a melyek hossza az R toldalékcsővekkel változtatható; a keletkező rezgés hullámhossza közelítőleg mindig az antenna négyszerese. Az oszcillátor sokkal jobban működik, ha a szikra világítógázban jön létre; e végből szerző a szikrateret pecsétviaszszal körülragasztja s be- és kivezető üvegcsővel látja el. Az oszcillátor — mint kimutatja — lökészerű gerjesztéssel (Stosserregung) működik, a keltett rezgések igen kevésbé csillapítottak (a decrementum 0.02 ... 0.04) s ez egyik fő előnye, másrészt a keltett rezgések hullámhosszasága az antenna kihúzásával igen egyszerűen s majdnem két oktávon keresztül változtatható.

Az oszcillátor a DRUDE-BLONDELL-féle berendezéstől eltérően nem volt a függőlegesen, 5 mm kölcsönös távolságban kifeszített két párhuzamos drótra beépítve, hanem a közelében, vele párhuzamosan felállítva, a kapcsolás (Koppelung) tehát meglehetősen laza volt. A drótok mentén eltolható két híd nem drótokból, hanem a drótokra merőleges lemezből állott (COLLEY után) a min a csomópont tökéletesebben képződik ki, hullámindikátor gyanánt pedig thermoelem és pánczélos galvanometer szolgált.

A csomópontok távolságának meghatározása a tizedmilliméter törtrészéig pontos volt, az egész mérés pontosságát a szerző 1.5 ezrelékre becsüli. A mérés eredménye, a víz dispersió-görbéje az 55 cm-től 20 cm-ig terjedő körben, az eddigiektől, főleg COLLEY-nek igen komplikált dispersió-görbéjétől lényegesen különbözik; nevezetesen RUKOP



3. ábra.

görbájének menete sokkal egyszerűbb, néhány helyen határozottan anomális dispersiót mutat (a törésmutató csökkenését növekvő frekvenciával), de távolról sem annyi helyen és olyan erőset, mint a COLLEY-féle görbe. Valószínű — mint már mások is gyanítják — hogy COLLEY igen túlbecsülte mérései pontosságát. Tájékoztatóul felemlítjük, hogy a törésmutató értéke 50 cm hullámhossznál (levegőben mérve) 8·98; 20 cm hullámhossznál pedig 8·82.

Selényi Pál.

PHYSIKAI LABORATORIUM.

J. Hartmann: Műszer és eljárás a felületi fényességnek fotografikus mérésére. Zeitschr. f. Instrumentenkunde 19. 97. l. 1899.

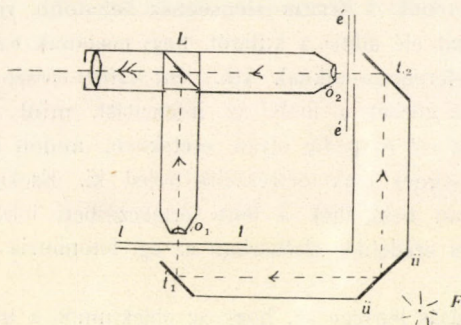
A fény emissziójára vonatkozó újabb kutatások, az egyes színképi vonalak szerkezetének, a ZEEMAN-jelenségnek behatóbb vizsgálata, ismételtén ama feladat elé állítja a kutatót, hogy magának *egy-egy színképi vonalnak* (interferencia-csíknak stb.) *intenzitás-elosztását* kell meghatározni, azt a görbét, a mely az intenzitást, mint a hullámhossz függvényét állítja elő és pedig olyan esetekben, midőn az egész görbe az ÅNGSTRÖM-egységnek csak törtrészeire terjed ki. Ezekre a mérésekre mind gyakrabban használják a fenti értekezésben leírt fotometert, a melyet HARTMANN eredetileg elsősorban az égi fotometria céljaira szerkesztett.

A mérési eljárás lényege az, hogy az objektumot, a melynek fényességét pontról-pontra meg akarja állapítani (pl. egy ködfoltot), lefotografálja s a lemez feketedését méri ki helyről-helyre fotometrikus úton.¹ A LUMMER-BRODHUN-féle fotometer és két mikroszkóp egyesítéséből származó *mikrofotometernek* vázlatát függőleges metszetben a mellékelt 4. ábra mutatja. Az F fényforrás által megvilágított u tejüveglemeztől szétszórt fényt a t_1 illetve t_2 tükör a kimérendő ll lemezre illetve az e fotometráló «ék»-re veti; az O_1 és O_2 mikroszkópjobjektívek a lemez, illetve az ék képét a L . LUMMER-BRODHUN fotometer-koczká átfogó lapján állítják elő s az előbbi a teljes visszaverődés révén, a másikat közvetlenül (az áthaladó sugarak révén) a baloldalt jelzett okulárral figyeljük meg. Ily módon a lemez kimérendő része s az «ék», a mely tulajdonképen egyik szélétől a másikig fokozatosan sötétebb fotografiai lemez, közvetlenül egymás mellett figyelhetők meg; az éket addig toljuk el, a míg a látótér két

¹ Magától értetődik, hogy a fotografikus fényessége az objektumnak egyáltalán nem vág össze a vizuális fényességével; erről egyelőre ne legyen szó.

része egyenlő sötét s az ék helyzetét leolvassuk. A látótér két része, azaz a prizmak érintkező, illetve totálisan reflektáló felületének alakja — mely a közönségesen használatos LUMMER-BRODHUN-fotométeren kör és körgyűrű, illetve négyszög, benne két trapézzal az egyenlő kontraszttal dolgozó fotometer-koczkán — különböző lehet; ha a kimérendő objektum felületi kiterjedésű (pl. ködfolt), akkor a reflektáló rész, azaz a lemez képéből kivágott darab czélszerűen köralakú, ha azonban pl. spektrumvonalat fotometrálnunk, akkor avval párhuzamos hosszúkas szalag.

A mérés egészen kifogástalanul azon az «elven» történhet, hogy egyenlő fényesek azok az objektumok, a melyek ugyanazon a lemezen



4. ábra.

egyenlő idő alatt egyenlő feketedést hoznak létre. Ezt az elvet alkalmazandó, ugyanarra a lemezre, a melyre a felvétel történt, egy ismeretes fotometriai skálát készítünk, pl. négyszögletes foltok sorozatát, a melyeket mind ugyanannyi ideig exponálunk, mint a felvételt, s egy bizonyos fényforrással (pl. HEFNER-lámpával) de különböző, lemért távolságokból való megvilágítással. Készítünk továbbá egy fotometráló «éket», t. i. egy fotografáló lemezt, a mely egyik szélétől a másikig fokozatosan, bár ismeretlen törvényszerűség szerint mind sötétebb s maga a mérés úgy történik, hogy mind a skálát, mind a mérendőt evvel az ékkel hasonlítjuk össze (szóval: az éket a skálával kalibráljuk).

A mérés pontosságát a következő adatokból ítélhetjük meg. Egyazon helyre három megfigyelő 10—10 beállítást végzett; a tíz beállításban előforduló maximális eltérés a három megfigyelőnél 4·4%, 3·5% és 3·5%-ra rúgott; a három megfigyelő méréseinek középértékei között pedig rendre 0·61%, 1·05% és 0·44% eltérés volt.

E. Lehmann: Egy új fotometerkonstrukció. (Verhandl. d. deutsch. phys. Ges. XIII. 335. 1911.)

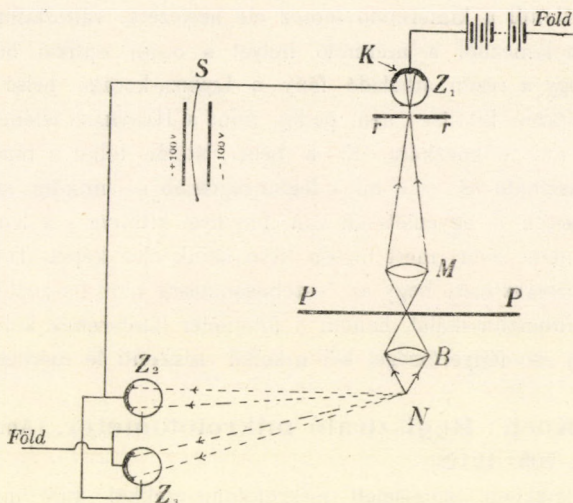
A gyakorlatban a HARTMANN-féle mikrofotometer eredeti formájában nem mindig használható; főleg akkor nem, a mikor igen gyors intenzitáseméréseket kell kimérni,¹ a mikor t. i. a legerősebb nagyításoknál is (a mit még lehet használni, hogy a lemez szemcsés volta túlságosan ne zavarjon) a fotometer-koczká által a lemezből kimetszett (hasadékszerű) darab nem eléggé egyenletes feketeségű. Ezen LEHMANN úgy segít, hogy közvetlenül a kimérendő lemez elé helyezett, változtatható réssel metszi ki a lemezből a mérendő helyet s olyan optikai berendezést használ, hogy a résen áthaladó fény a LUMMER-koczká belső köralakú látóterét *egészen* kitöltse; nem pedig, mint a HARTMANN-félénél, a lemez éles képét veti a koczkára. Ez a belső látóter tehát a rendes nagyságúra választható és — a mi a leglényegesebb — mindig, még olyan szűk rés esetén is egyenletesen van fénynyel kitöltve s a lemez szemcsés volta nem zavar, mert hiszen nem látjuk éles képét. További változtatása LEHMANN-nak, hogy az összehasonlításra nem használ egy másik fotografált intenzitásskálát, hanem a fotometer látóterének külső részére (a gyűrűre) eső fényerősséget két nikollal csökkenti le mérhető módon.

P. P. Koch: Regisztráló mikrofotometer. (Annalen der Physik. 39. 705. 1912.)

Az eddigiekben ismertetett mikrofotometerekkel való mérés igen fáradságos és időrabló; így pl. egyetlen kb. 0.3 mm szélességű spektrumvonal kimérése jó egy órát vesz igénybe. Ezen igyekszik segíteni a következőkben ismertetendő berendezés, a mely a mérést egészen automatikusan végzi és regisztrálja, azaz maga lerajzolja a feketedéseloszlás görbéjét. A berendezés vázlatát a mellékelt 5. rajzon látjuk. *P* a fotografáló-lemez, melynek feketedését akarjuk kimérni; *N* egy NERNST-égő, melynek fényét a *B* lencse a *P* lemezre veti. Az *M* mikroszkópiai objektív előállítja a *P* lemez képét, a melyből az *r* réssel tetszésszerűen széles-ségű darabot metszünk ki. Az *r*-en áthaladó fény a *Z*₁ fotoelektromos cellára esik, a melynek kálium-elektrodja a kis elemekből álló akkumulátor-batteria negatív sarkával van összekötve (a pozitív sark földelve van) míg a másik elektrod egyrészt az *S* húros elektrometer-

¹ V. ö. P. P. KOCH: Fotografáló lemezek feketedésének kimérése. (Ann. d. Phys. 38. 507. 1912.)

rel van összekötve, másrészt a Z_2 és Z_3 fotoelektromos cellákon át a földdel. Mialatt a szerkezet óraműve a P lemezt eltolja, a Z_1 -re a feketedéssel arányosan változó fényintenzitás esik, a létrejövő kisebb vagy nagyobb fotoelektromos áram az elektrometert különböző feszültségre tölti fel s az elektrometer fonalának kitérését regisztráljuk azután egy másik fotografáló lemezen, a mit ugyancsak az előbbi óramű tol el. Megjegyzendő, hogy igen gyenge áramoknak elektrometerrel való mérésénél az



5. ábra.

elektrometert a földdel rendszerint igen nagy *állandó*, ellenállással (BRONSON-ellenállás, xylol-ellenállás) kötik össze; itt ennek helyébe a Z_2 cella lép, a melyet ugyanaz a NERNST-égő világít meg, hogy így ennek intenzitásingadozásai az elektrometert kevésbé befolyásolják; a Z_3 cella — a tapasztalat szerint — az egész fotoelektromos berendezés «tétlenségét» csökkenti (a minek az okairól azonban a szerző sem tud biztosat mondani). Az értekezés még igen sok érdekeset tartalmaz mind a berendezés részleteit, mind a pontosabb vizsgálat (tétlenség, állandóság stb.) eredményeit illetően s végül egy abszorpciós szinkép s egy FABRY-PERROT-interferencia-gyűrű fotográfiájának az eszközzel felvett görbéjét. Ezekre vonatkozólag az olvasót az eredeti értekezésre kell utalnunk.

Selényi Pál.

A Matematikai és Physikai Társulat huszonegyedik rendes közgyűlése.

A választmánynak f. évi márczius 7-én kibocsátott meghívójára a Matematikai és Physikai Társulat XXI. rendes közgyűlését 1914. évi április hó 30 án d. u. 5 $\frac{1}{2}$ órakor tartotta meg, a melyen akövetkező tagok vettek részt:

Anderkó Aurél, Balog Mór, Bartoniek Emil, Bartoniek Géza, Bodola Lajos, Czukor Károly, Demeczky Mihály, Egerváry Jenő, Fejér Lipót, Fröhlich Izidor, Gruber Nándor, Hasenauer Andor, Klein Magda, Kopp Lajos, Kossowitz Gyula, König Dénes, Kövesligethy Radó, Kürschák József, Küssler Elly, Lukács Ferencz, Mattyasóvszky Kászon, Mikola Sándor, Milakovszki László, Pekár Dezső, Pécsi Albert, Privorszky Alajos, Rados Ignác, Rátz László, Romsauer Lajos, Rybár István, Sárközy Pál, Schuller Alajos, Sós Ernő, Suták József, Szegő Gábor, Széky István, Szűcs Adolf, Terlanday Emil, Tillinger Istvánka, Tolnay Jenő, Tötössy Béla, Winter József, Wodetzky József, Zemplén Győző.

A közgyűlés napirendje:

1. Elnöki megnyitó.
2. Titkári jelentés.
3. Pénztárnok jelentése és költségelőirányzat 1914-re.
4. Pénztárvizsgáló-bizottság jelentése.
5. Ügyvivő titkar és választmányi tagok választása.
6. Indítványok.

1. Elnöki megnyitó.

Báró Eötvös Loránd elnök megnyitván az ülést, üdvözli a megjelent tagtársakat, bemutatja a mult ülés hitelesített jegyzőkönyvét, a mai ülés jegyzőkönyvének vezetésére Kopp Lajost, hitelesítésére pedig Bodola Lajos és Széky István rendes tagokat kéri fel.

2. Titkári jelentés Kövesligethy Radóttól.

Tisztelt Közgyűlés!

Társulatunk 22 éves életében ma 17-edszer olvasom titkári jelentésemet.

Az a nagy veszteség, a mely egy évvel ezelőtt sujtott, melyet nem felejtettünk el, mert el sem felejthető, de a melyet az élők joga és kötelessége szerint a legszerencsésebben póoltunk, engem közvetve is ért; elvesztettem 17 éven át volt titkár- és szerkesztőtársamat, mi nekem a tevékenység e terén egy több mint háromlusztrumos, soha a legcsekélyebb körülménytől sem zavart együttműködésnek megszakadását jelentette.

Társulatunk, a mely anyagiakban szegény, de erkölcsi és szellemi erőiben gazdag, tétoválás nélkül, a legszerencsésebb vótummal oly fiatal erőt állíthatott titkártársam helyére, a ki tudományos pályája első pillanatától a Társulat neveltje, személyes tulajdonságainál fogva pedig csak hamar igaz és benső barátunk lett.

Újra megvoltak tehát a legharmonikusab együttműködésnek előfeltételei. Mégis, becsületesen vizsgálva, azt hiszem, hogy ez látszat csupán. Mert egyenletesen fog-e megoszlanı a munka terhe az új titkár és tisztjét egyszerűen folytató titkár között, a kit mindújabb kötelességek, a melyek elöl kitérni nem lehet, és még gyakrabban nem is szabad, másfelé is szólítanak, és a ki ezért már néhány évvel ezelőtt is lemondásra gondolt? Meggyőződésem, hogy a titkári kar regenerációja csak akkor tökéletes, ha teljes is. Ezért kértem a múlt év utolsó ülésében a Választmányt, hogy engem titkári tisztem alól felmenteni kegyeskedjék. És úgy gondoltam, hogy a változás a legcélszerűbben a Matematikai és Physikai Lapok egy teljes kötetének lezárásakor történhetnék. A Választmány szives volt a közgyűlés határozatáig nemcsak helyet adni kérelmemnek, hanem kegyes volt ideiglenesen megbízni a ügyvivő titkári teendőkkel legkedvesebb jelöltemet, a ki bizonyára mindnyájunknak egyetlen jelöltje is. És így kérem a Tisztelt Közgyűlést, hogy Választmányunk mindkét rendbeli intézkedését jóváhagyni, illetőleg megújítani méltóztassék és megköszönve a tisztelt Társulatnak irántam hosszú éveken át volt szives jóindulatát, elnézését, bizalmát és barátságát, kérem, hogy ezeket — az elnézésre csak nekem volt szükségem — változtatlanul utódomra is átruházni sziveskedjenek. Lemondásom nem lesz visszavonulás; ezentúl is szorgalmas tag kívánok maradni.

A XX. matematikai tanulóversenyt a múlt évi október 18-án tartottuk meg fényes külső eredménnyel, a mennyiben 68 tanuló 42 dolgozattal versenyzett. De az erkölcsi eredmény is teljesen kielégítő volt: az első díjat Radó Tibor, a másodikat Filep Lajos nyerte el s dicséretre méltó dolgozat sem hiányzott.

A Matematikai és Physikai Lapok XXII. kötete $27\frac{1}{2}$ ív terjedelemben megjelent, 6 matematikai és 9 physikai tárgyú önálló értekezéssel. Nyolcz rendes ülésben 8 matematikai és 7 physikai tárgyú előadást hallottunk. A mai közgyűlésünk folyamán megváltoztatandó viszonyok mellett immár bizton remélhetjük, hogy kísérleti tárgyak ezentúl sűrűbben fognak szerepelni.

A tagok száma a XXII. társulati év végén 370, beleértve ebbe 16 alapítót. De az új titkár, a ki a nagy Természettudományi Társulat kipróbált tapasztalatait magával hozzánk elhozza, a mai választmányi ülésen nem kevesebb, mint *hetvenkét* (72) új tagot jelentett be. Nem kétlem, hogy e fényes eredmény az új titkárság tevékenységének minden ágában elentkezik.

A Magyar Tudományos Akadémia III. osztálya és annak Matematikai és Természettudományi Bizottsága az elmúlt évben is 2000 korona segélyével hatalmasan hozzájárult fennállásunk biztosításához. Az elmúlt évben ezen két testület vezetésében is változás állott be, de a változás teljes bizalommal tölt el az iránt, hogy legfontosabb segélyforrásunk nem apad el, ha adományát megérdemeljük.

Az elmúlt év különösen fájdalmasan ritkította sorainkat; König Gyula, Lengyel Béla és Vályi Gyula tagtársak elhunytáról már az utolsó közgyűlés értesült s kívülök elvesztettük K. Kiss József, Fr. Kiss Károly, Kronich Lénárd, Perjessy László és Rombauer Emil tagtársainkat is. Áldott legyen emlékek.

Munkatársaim és Kartársaim fogadják újra hálás köszönetemet, segítségükért, barátságukért, mindenért, a mi az elmúlt 17 év emlékéét nekem oly kedvessé teszi. És kérem, hogy ugyanazt a szeretetet vigyék át az új titkárokra, a kik azt a legteljesebb mértékben megérdemlik. Utolsó titkári jelentésemet pedig méltóztassanak kegyesen tudomásul venni.

Budapest, 1914 április 30-án.

Kövesligethy Radó

A jelentést a közgyűlés tudomásul veszi.

BEVÉTELEK	Előirányzat		Eredmény	
	Kor.	fill.	Kor.	fill.
1912. évi zárószámadási maradvány	1807	82	1807	82
Folyó és köv. évi tagdíjak	2400	—	1296	—
Hátralékos tagdíjak	1800	—	1365	—
Alapító tagdíjak	—	—	200	—
M. Tud. Akadémia segélye	2000	—	2000	—
Hirdetési díjak	200	—	—	—
Kamatok	700	—	709	63
Előfizetési díjak	800	—	901	40
Nyomtatványokból	200	—	43	20
			8293	05

Vagyor

VAGYON	1912. év végén		1913. év végén	
	Kor.	fill.	Kor.	fill.
Alaptőke:				
Leszám. és pénzv. bank letétszámláján:				
a) Készpénz	1500	—	1700	—
b) 2600 K névért. főv. kölcsönkötv.	2600	—	2600	—
c) 100 « « koronajáradék-kötv.	400	—	400	—
Első hazai takarékpénztári betét	108	—	108	—
Majthényi Ottó-féle hagyaték	10000	—	10000	—
Forgó tőke:				
Készpénz	94	82	45	67
Leszám. és pénzv. bankban takp. betét ..	48	80	48	80
M. kir. postatakarékpénztárban	1032	20	304	71
Első hazai takarékpénztári betét	200	—	200	—
Leszám. és pénzv. bank letétszámláján ..	432	—	432	—
Tagdíjhátralékok	4000	—	4500	—
Föl nem vett hirdetési díjak	100	—	200	—
Nyomtatványokban	700	—	700	—
	20915	82	20936	18

A számadásokat megvizsgáltuk és rendben találtuk.

Balog Mór Bogyó Samu
a közgyűlés részéről.

Dr. Zemlé
h. ügyvivő

1914. évi költség

BEVÉTELEK	1913. évi		1914. évi	
	előirányzat			
	Kor.	fill.	Kor.	fill.
Zárószámadási maradvány	1807	82	1028	18
Folyó és köv. évi tagdíjak	2400	—	2600	—
Hátralékos tagdíjak	1800	—	2000	—
M. Tud. Akadémia segélye	2000	—	2000	—
Hirdetési díjak	200	—	300	—
Előfizetési díjak	800	—	800	—
Nyomtatványokból	200	—	200	—
Kamatok	700	—	600	—
Hiány	422	35	1260	88
	10330	17	10789	06

írószámadások.

KIADÁSOK	Előirányzat		Eredmény	
	Kor.	fill.	Kor.	fill.
Nyomdai költség a múlt évre	3701	17	3400	—
a folyó évre	3200	—	—	—
Írói tiszteletdíjak a múlt évre	769	—	899	—
a folyó évre	2000	—	1885	50
Expediitio- és irodai költségek	500	—	693	37
Középiskolai tanulóverseny	160	—	158	—
Az alaptőkéhez csatoltatott	—	—	200	—
Vegyes kiadások	—	—	29	—
Pénztári maradvány a) készpénzben	—	—	45	67
b) takarékp. betétben	—	—	982	51
			8293	05

érleg.

TEHER	1912. év végén		1913. év végén	
	Kor.	fill.	Kor.	fill.
Nyomdai tartozások	3701	17	4350	70
Írói tiszteletdíjak	769	—	578	36
A XXII. évf. 6—8. füzetének nyomtatási költsége	—	—	1403	59
Tiszta vagyon	16445	65	14603	53
	20915	82	20936	18

Kelt Budapesten, 1914. évi április hó 25-én.

Győző
titkár.

Beke Manó Rácz László
a választmány részéről.

előirányzat.

KIADÁSOK	1913. évi		1914. évi	
	előirányzat			
	Kor.	fill.	Kor.	fill.
Nyomdai költség a múlt évre	3701	17	4350	70
a folyó évre	3200	—	3000	—
Írói tiszteletdíjak a múlt évre	769	—	578	36
a folyó évre	2000	—	2000	—
Expediitő- és irodai költségek	500	—	700	—
Középisk. tanulóverseny	160	—	160	—
	10330	17	10789	06

Dr. Privorszky Alajos
pénztárnok.

3—4. Pénztárnok jelentése és költségelőirányzat 1914-re és a pénztárvizsgáló-bizottság jelentése.

Pénztárnok előterjeszti a fenti számadást és vagyon-mérleget 1913-ról, az elnök bemutatja a pénztárvizsgáló bizottságnak jelentését, mely szerint a pénzkezelés kifogástalan volt.

A közgyűlés a pénztárnoknak jelentését, valamint a pénztárvizsgáló bizottság nyilatkozatát tudomásul veszi, a pénztárnoknak a felmentvényt megadja és a pénztárvizsgálóknak szíves fáradozásukért köszönetet mond, felkérvén Balog Mór és Bogyó Samu rendes tagokat, hogy a pénztárvizsgálói tisztelet a következő évre is vállalják el.

Pénztárnok előterjeszti a költségelőirányzatot az 1914 évre, melyet a közgyűlés elfogad.

5. Ügyvivő titkár és választmányi tagok választása.

Az elnök jelenti, hogy Kövesligethy Radó lemondásával megüresedett az ügyvivő titkári tisztség, betöltendő továbbá Beke Manó, Gruber Nándor, br. Harkányi Béla és Réthy Mór helye a választmányban, kiknek megbízatása az alapszabályok 20. §-a értelmében lejár. A választmány az ügyvivő titkári tisztségre Zemplén Győző választmányi tagot jelöli, ki f. évi január elseje óta a választmány megbízásából már el is látta az ügyvivő titkári teendőket; a választmány jelöltjei a megüresedett választmányi helyekre: Beke Manó, Gruber Nándor, br. Harkányi Béla és Réthy Mór. Az esetben, ha választmányi tagot választanak meg ügyvivő titkárrá, a választmányban még egy hely megüresedik; e helyre a választmány Kövesligethy Radó lelépő ügyvivő titkárt jelöli.

A elnök a szavazatok összegyűjtésére szavazatszedő-bizottságot küld ki, melynek elnöke Terlanday Emil, tagjai pedig Rybár István és Szűcs Adolf, s a szavazatok beadásának idejére az ülést felfüggeszti.

A szavazatok beadása után Terlanday Emil jelenti, hogy beadtak 34 szavazatot, ezek közül 34 szavazatot kapott Zemplén Győző, mint ügyvivő titkár, ugyanannyit Beke Manó, Gruber Nándor, br. Harkányi Béla, Réthy Mór és 33-at Kövesligethy Radó, mint választmányi tag.

Az elnök kihirdeti, hogy a közgyűlés Zemplén Győzőt ügyvivő titkárrá, Beke Manót, Gruber Nándort, báró Harkányi Bélát, Kövesligethy Radót és Réthy Mórt pedig választmányi tagokká megválasztotta, egyben meleg szavakkal üdvözli az újonnan megválasztottakat.

Zemplén Győző hálásan köszöni a közgyűlésnek az előlegezett bizalmat és igéri, hogy törekedni fog azt utólag kiérdemelni.

6. Indítványok.

1. Zemplén Győző ügyvivő titkár előterjeszti Rados Gusztáv alelnöknek következő indítványát:

Mély tisztelettel indítványozom, hogy a Matematikai és Fizikai Társulat közgyűlése Stäckel Pál kiváló matematikust, a heidelbergi egyetem tudós tanárát, tiszteleti tagjainak sorába válassza.

Stäckel Pál, mindkét Bolyai életrajzára vonatkozó adatok gyűjtésével, levelezéseik és fontos műveik kiadásával, e művek ismertetésével és méltatásával, Bolyai János prioritásának Lobatschewsky-vel szemben való megállapításával, oly hervadhatatlan érdemeket szerzett a magyar matematikai irodalom körül, melyeknek részünkről való elismerése szinte erkölcsi kötelességünk. Ennek az elismerésnek és hálának fogjuk tanújelét adni, midőn őt Társulatunk tiszteleti tagjává választjuk.

Tisztelettel ajánlom indítványom elfogadását.

Budapest, 1914. évi márczius hó 1-én.

Rados Gusztáv
alelnök.

A közgyűlés az indítványt nagy lelkesedéssel elfogadván, Stäckel Pál heidelbergi egyetemi tanárt egyhangúlag a társulat tiszteleti tagjává megválasztja.

2. Az ügyvivő titkár előterjeszti Gáti Béla rendes tag indítványát, melyben azt javasolja, hogy a társulat adja ki a közlönyében a tagok névjegyzékét a füzettől leválasztható alakban, elkülönítve a matematikusokat a fizikusoktól, továbbá megjelölve idegen nyelven is a tagok foglalkozását. Az ügyvivő titkár jelenti, hogy a társulat időközönként már eddig is kiadta a tagok névjegyzékét a társulat folyóiratában és a választmány elérkezettnek látja az időt, hogy e névjegyzéket legközelebb (ez év végén) újból kiadja, Gáti tagtárs úr indítványának egyéb részleteit azonban nem tartja czélszerűeknek. A közgyűlés Gáti Béla indítványát a választmány módosításával elfogadja.

RADOS IGNÁC a közgyűlés figyelmébe ajánlja a több mint húsz éves folyóirat tartalomjegyzéke kiadásának szükségességét és kijelenti, hogy erre a munkára ő maga hajlandó vállalkozni. A közgyűlés megbizza a választmányt és a szerkesztőséget, tegyék megfontolás tárgyává a tartalomjegyzék ügyét.

★

Az elnök berekeszti a közgyűlést és megnyitja a rendes előadó-ülést.

ELŐADÁSAINKRÓL.

1914 április 30-án.

Lukács Ferenc: A Laplace-sorról. Kiindulva a gömbön eloszlott ható potenciáljának kifejezéséből, előadó heurisztikus megfontolásokkal a következő képletet nyeri a gömbfelületen megadott tetszőleges $f(\vartheta, \varphi)$ függvény (ϑ, φ a geográfiai koordináták) számára:

$$f(\vartheta, \varphi) = \frac{1}{4\pi} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \int \int f(\vartheta', \varphi') \cdot P_n(\cos \gamma) d\vartheta' d\varphi'$$

$$(\cos \gamma = \cos \vartheta \cdot \cos \vartheta' + \sin \vartheta \sin \vartheta' \cdot \cos(\varphi - \varphi'))$$

a melyben P_n az n -edik LEGENDRE-féle polinóm. A jobboldali sor a LAPLACE-sor, a melyre vonatkozó szigorú vizsgálatokat ismertet az előadó. Végső eredménye az, hogy erre a sorra, mely a FOURIER-sor analogonja «mutatis mutandis» érvényesek a FOURIER-sor összegezésére vonatkozó összes tételek.

Rybár István dr.: A teljes fényvisszaverődés abszolút fázisváltozásának kísérleti meghatározásáról. Előadó kísérleti módszert ismertet a teljes fényvisszaverődés abszolút fázisváltozásainak meghatározására. Eljárásának lényege abban áll, hogy interferenciát létesít a totálisan és a parciálisan reflektált fény között s a totális reflexió fázisváltozásait a parciális reflexió ismeretes fázisváltozásaiával hasonlítja össze. Kísérleti berendezése a következő: Egy keskeny, hasadékszerű résből kilépő fénynyaláb FRESNEL-féle kettős tűkörről verődik vissza s két koherens sugárnyalábra bomlik; a fény ezután egy lencséhez érkezik, mely a FRESNEL-féle kettős tűkörről történő reflexiókhoz tartozó virtuális képek reális képeit állítja elő; az így egymástól szétválasztott két fénynyaláb ezután egy üvegprizmában belső reflexiót szenved, még pedig az egyik fénynyaláb minden sugara üveg-levegő határfelületről, a másik fénynyaláb egy része szintén üveg-levegő határfelületről, de egy másik része

üveg-folyadék határfelületről verődik vissza. A folyadék alkalmas megválasztásával elérhető, hogy a reflexió a folyadékról parciális legyen. A prizmából kilépő fénynyalábok egy hengerlencsén való áthaladásuk után, mely a sugarakat alkalmas módon konvergensekké teszi, interferálnak: két *interferencia-csikrendszer áll elő, melyek egymáshoz képest el vannak tolva*. Ez az eltolódás az üveg-levegő és az üveg-folyadék határfelületről történő reflexiókat kísérő fázisváltozások különbségével egyenlő. A kísérleti megfigyelések eredménye az, hogy a *teljesen visszaverődött fény fázisa a közönségesen visszaverődött fény fázisához képest előre siet, még pedig oly értékkel, a melyet a FRESNEL-féle elmélet állapít meg*. További részletekre nézve l. Matematikai és Természettudományi Értesítő XXXII. k. 1. füzet, 1. lap (1914).

Új tagjaink névjegyzéke.

A választmány 1914. év április 30-án tartott ülésében a Mathematikai és Fizikai Társulat rendes tagjaivá megválasztotta a következőket:

Báró Andreánszky István, egyet. hallgató, Budapest, IV., Borz-u. 12.,

I. em. Ajánlók Fejér L., Fekete M.

Baintner Géza, egyet. hallgató, Kolozsvár, Bem-u. 9. Ajánlók
Tangl. K., Riesz F.

Bak Elza, gimn. tanár, Budapest, VI., Andrássy-út 65. Ajánlók
Fejér L., Fekete M.

Bakács Jolán, f. keresk. isk. tanár, Kolozsvár, Marianum. Ajánlók
Sz. Nagy Gyula, Fejér L.

5. *Bakó Kálmán*, tanárjelölt, Kolozsvár, Király-u. 4. Ajánlók Tangl K,
Riesz. F.

Balla József, f. keresk. isk. tanár, Zalaegerszeg. Ajánlók Privorszky A.,
Zemplén Gy.

Ballenegger Andor, mértékhit. int. tisztviselő, Budapest, II., Me-
cses-u. 3. Ajánlók Bartoniek E., Zemplén Gy.

Bauer Klára, egyet. hallgató, Budapest, VI. Izabella-u. 66., III. em. 11.
Ajánlók Fejér L., Fekete M.

Bálint Domokos, tanárjelölt, Kolozsvár, Kossuth Lajos-u. 14.
Ajánlók Tangl. K., Riesz. F.

10. *Bóka István*, egyet. tanársegéd, Kolozsvár, Mikó-u. 30. Ajánlók
Klug L., Zemplén Gy.

Bresztovszky Béla, műegyetemi tanár, Budapest, I. Fehérvári út 21.
Ajánlók Fejér L., Zemplén Gy.

Bródy Imre, székesfővárosi tanár, Budapest, VIII., József-körút 7.,
II. em. Ajánlók Egerváry J., Zemplén Gy.

Császár Elemér, tanárjelölt, Budapest, I. Ménesi út 11. Ajánlók
Fejér L., Zemplén Gy.

- Csefő Sándor*, ref. kollégiumi tanár, Kolozsvár, ref. kollégium.
Ajánlók Klug L., Zemplén Gy.
15. *Csonka Mihály*, kegyesrendi tanár, Nyitra. Ajánlók Nagy József,
Zemplén Gy.
- Csösz László*, tanárjelölt, Kolozsvár, Farkas-u. 4. Ajánlók Tangl K.,
Riesz F.
- Czukor Károly*, egyet. hallgató, Budapest, I., Kruspér-u. 4. fsz. 5.
Ajánlók Fejér L., Fekete M.
- Déri Zsigmond*, főreálisk. tanár, Budapest, VIII., József-u. 35.
Ajánlók Kopp L., Zemplén Gy.
- Ehrenhaft Félix dr.*, egyetemi tanár, Bécs, IX. Boltzmannstrasse 4.
Ajánlók b. Eötvös L., Zemplén Gy.
20. *Farkas Gábor*, tanárjelölt, Kolozsvár, Eszterházy-u. 21. Ajánlók
Tangl K., Riesz F.
- Fenyvesi Andor*, egyet. hallgató, Budapest, VI., Dalmok-u. 2/c, 1/6.
Ajánlók Fejér L., Fekete M.
- Fodor Henrik dr.*, szfővárosi tanár, Budapest, VIII., József-u. 9., II/3.
Ajánlók Selényi P., Zemplén Gy.
- Frank János*, főreálisk. tanár, Budapest, Markó-u., főreáliskola.
Ajánlók Privorszky A., Zemplén Gy.
- Gottlieb Béla*, okl. tanár, Budapest, X., Maglódi út 8. Ajánlók
Lévay E., Winter J.
25. *Gulyás Károly*, ref. kollégiumi tanár, Marosvásárhely. Ajánlók
Rados I., Zemplén Gy.
- Gyulai Zoltán*, egyet. tanársegéd, Kolozsvár, Kölcsey-út. 6. Ajánlók
Tangl K., Riesz F.
- Hajós Géza*, f. keresk. isk. tanár, Debreczen. Ajánlók Tolnai J.,
Zemplén Gy.
- Hercz Szidónia dr.*, egyet. tanársegéd, Kolozsvár, Széchényi tér 9.
Ajánlók Tangl K., Riesz F.
- Irlinger Antal*, főreálisk. tanár, Esztergom. Ajánlók Hasenauer A.,
Zemplén Gy.
30. *Kaluzsai Károly*, tanárjelölt, Kolozsvár, Hunyadi-tér 12. Ajánlók
Tangl K., Riesz F.
- Kálmán József*, polgári isk. tanító, Kassa, Bercsényi-u. 4. Ajánlók
Fejér L., Zemplén Gy.
- Keul Frigyes*, egyet. tanársegéd, Kolozsvár, Majális-u. 16. Ajánlók
Tangl K., Riesz F.

- Kilczér Gyula*, egyet. hallgató, Budapest, VI., Podmaniczky-u 99., I/4.
Ajánlók Fejér L., Fekete M.
- Komor Juliska*, gyakorló tanár, Budapest, VI. Szondy-u. 28., I/7.
Ajánlók Fejér L., Fekete M.
35. *Kovács Károly*, f. keresk. isk. tanár, Marosvásárhely, Ajánlók Fejér L., Fekete M.
- Kuzaila Péter*, tanítóképző int. tanár, Kolozsvár, Lőrincz-u. 1.
Ajánlók Tangl K., Riesz F.
- László Henriette*, egyet. hallgató, Budapest, VII., Ilka-u. 42/a
Ajánlók Fejér L., Fekete M.
- Lengyel Miksa*, egyet. hallgató, Budapest, VII., Kertész-u. 46., I/7.
Ajánlók Fejér L., Fekete M.
- Loykó Béla*, egyet. hallgató, Budapest, VII., Bethlen-u. 43., II/12.
Fejér L., Fekete M.
40. *Lukács Tibor*, egyet. hallgató, Budapest, VII., Ilka-u. 14., III/36.
Ajánlók Fejér L., Fekete M.
- Magi Ferencz*, reálisk. tanár, Sümeg. Ajánlók Dávid L., Zemplén Gy.
- Milakóvszky László*, tanítóképző-int. tanár. Esztergom. Ajánlók Mattyasóvszky K., Zemplén Gy.
- Milinkovich Frigyes*, főreáliskolai tanár. Kassa. Ajánlók Bóbita E., Zemplén Gy.
- Molnár Evelin dr.*, gimn. tanár. Budapest, Andrássy út 65. Ajánlók Fejér L., Zemplén Gy.
45. *Molnár Imre*, kegyesr. tanár. Kolozsvár, Kalazantinum. Ajánlók Tangl K., Riesz F.
- Neményi Anna*, egyet. hallgató. Budapest, IV., Váci-u. 67., I. em.
Ajánlók Fejér L., Fekete M.
- Nyíró Jolán*, egyet. hallgató. Kolozsvár, Mikó-u. 36. Ajánlók Tangl K., Riesz F.
- Olajos János*, ref. kollégiumi tanár. Kolozsvár, ref. Kollégium.
Ajánlók Klug L., Zemplén Gy.
- Óltay Károly*, műegyetemi tanár, Budapest, I., Átlós-út 9. Ajánlók b. Eötvös L., Zemplén Gy.
50. *Osztian Kálmán*, főreálisk. tanár, Kassa. Ajánlók Bóbita E., Zemplén Gy.
- Pogácsa János*, tanítóképző-int. tanár, Győr. Ajánlók Bodócs I., Zemplén Gy.
- Pfeifer Leonie*, gyakorló tanár, Budapest, V., Klotild-u. 22. Ajánlók Fejér L., Fekete M.

- Raj László*, műegyetemi adjunktus, Budapest, VI., Bulyovszky-u. főreálisk. Ajánlók Réthy M., Zemplén Gy.
- Renner János Lajos*, okl. tanár, Budapest, VIII., József-u. 31., I/7. Ajánlók Rybár I., Zemplén Gy.
55. *Rohrer László*, állatorvosi főisk. tanár, Budapest, VII., Rottenbiller-utca 23/25. Ajánlók Pekár D., Zemplén Gy.
- Schrodt István dr.*, f. iparisk. tanár, Budapest, VIII., Szentkirályi utca 17. Ajánlók Fejér L., Zemplén Gy.
- Schuller Lajos*, egyet. hallgató, Budapest, X., Hédervári-u. 48. Ajánlók Schuller A., Zemplén Gy.
- Schwarz Ilona*, gyakorló tanár, Budapest, II., Nyúl-u. 7. Ajánlók Fejér L., Fekete M.
- Soós Sándor*, egyet. hallgató, Budapest, VIII., József-körút 82. I/2. Ajánlók Fejér L., Fekete M.
60. *Somogyi Antal*, egyet. tanársegéd, Budapest, VIII., Múzeum-körút 6. Ajánlók Selényi P., Zemplén Gy.
- Strobl József*, szőlővárosi tanár, Budapest, V., Sziget-u. 4. II/22. Ajánlók Tolnai J., Zemplén Gy.
- Szabó Jenő*, tanárjelölt, Kolozsvár, Árpád-u. 19. Ajánlók Tangl K., Riesz F.
- Szarvasy Imre*, műegyetemi tanár, Budapest, IX., Üllői út 4. Ajánlók b. Eötvös L., Zemplén Gy.
- Szegő Gábor*, egyet. hallgató, Budapest, I., Ménesi út 11. Ajánlók Fejér L., Fekete M.
65. *Szilasi Nina*, egyet. hallgató, Budapest, VIII., Röck Szilárd-u. 17. IV/2. Ajánlók Fejér L., Fekete M.
- Szilágyi Dezső*, egyet. hallgató, Budapest, VI., Hún-u. 4/a, III/8. Ajánlók Fejér L., Fekete M.
- Szomorú Árpád*, tanárjelölt, Kolozsvár, Király-u. 4. Ajánlók Tangl K., Riesz F.
- Tillinger Istvánka dr.*, okl. tanár, Budapest, II., Bimbó-u. 15., IV/8. Ajánlók Kopp L., Zemplén Gy.
- Tomits Iván dr.*, okl. tanár, Budapest, VIII., Szentkirályi-u. 17. Ajánlók Fejér L., Zemplén Gy.
70. *Tóth Aladár*, benczés tanár, Pannonhalma. Ajánlók Sárközy P., Zemplén Gy.
- Tóth Károly*, ref. főgimnáziumi tanár, Pápa. Ajánlók Fejes Zs. Zemplén Gy.

Zemplén Géza dr., műegyetemi tanár, Budapest, I., Gellért-tér 4.
Ajánlók b. Eötvös L., Zemplén Gy.

Kérjük t. tagtársainkat, hogy lakáscsimük megváltozását a szerkesztőségnek közölgék (Budapest, I., Fehérvári út 54/a).

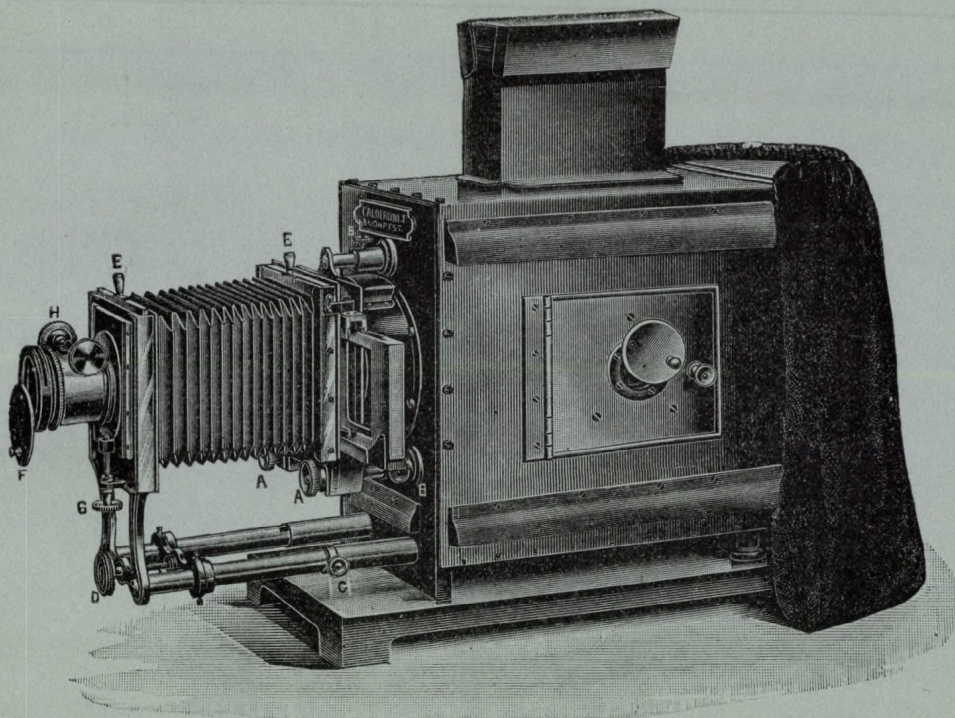
Sajtóhiba.

A jelen évfolyam áprilisi füzete 221. lapján (SCHULLER A. cikkében) alulról a 11. sorban *2ds* helyett *2as* olvasandó.

Calderoni mű- és tanszervállalat r.-t.

Budapest, IV., Váci-utca 50.

Ajánlja saját szerkesztésü szabadalmazott vetítőkészülékeit.



Vetítőkészülék «Calderoni I»

Ezen készülék lámpa-szekrénye legjobb minőségű aczéллеmezekből van készítve, eternit-béléssel és kitűnő szellőztető szerkezettel van ellátva, 120 mm. átm. kettős megvilágító-lencsével (Kondensor), hajtócsavarral ellátott objektív-foglalattal, egy ebbe illő kitűnő vetítési objektívvel, a finom beállítás részére szolgáló mikrometer-csavarral és tolószerkezettel ellátott kettős kép-váltó kerettel van felszerelve. A kondensor-lencsék a lámpatartó szekrényen kívül vannak elhelyezve és a lencsék közt felmelegedő levegő a kondensort tartó cső felső részén levő és egy kis fedővel borított nyíláson át távozik. A kondensor mögött egy kali-üvegből készített védőlemez van elhelyezve. — A készülék, mely egy áttört vastalapzatra van felszerelve, teljesen fémből van készítve. — A bronzból készített objektívet tartó előrész egy mikrometer-csavar segítségével magasabbra és mélyebbre állítható. Az oldalajtóval és bársonyból készült fényelzáró-függőnnyel ellátott készülék ára fenti felszereléssel *lámpa nélkül*

K 260.—

Vetítőkészülék «Calderoni I. H.»

Ezen készülék, mely ugyanolyan szerkezetű mint a túlfoldali, egy általunk szerkesztett hűtővel van még ellátva, mely a megvilágító lencsék közé van iktatva. — Ezen felszerelés vetítő készülékünket a legökéletesebb ilyenmő készülékké avatja. Ára *lámpa nélkül* K 350.—

A vetítőkészülékeinkhez felszerelt hajtócsavarral ellátott objektív foglalatba tetszés szerinti 6 különféle gyútávolságu vetítési objektívet lehet elhelyezni, melynek gyútávolsága 150, 200, 250, 310, 355, 405, mm. — Minden készülékhez a fentjelzett árban csak egy darab ilyen vetítési objektív tartozik. — Minden további objektív ára darabonként K 24.—

Vetítőkészülékeink a merőleges és vízszintes síkban végbemenő vetítésre, valamint mikroszkopikus vetítésre is, úgyszintén szinképek, interferenciális tünemények, fényelhajlási, fényesarkítási és kettős törési kísérletek stb. vetítésére is alkalmasak. Ezen mellékeszközökről addig is, míg az ezekről szóló külön árjegyzékünk meg fog jelenni, kívánatra szivesen küldünk részletes költségvetéseket. Vetítőkészülékeinket — melyek a legökéletesebbek — tetszés szerinti fényforrással, u. m. villamos ívfénnyel, mészfénnyel, acetylénnel, borszesz-izzófényvel stb. szállítjuk.

Elektromos ívlámpa

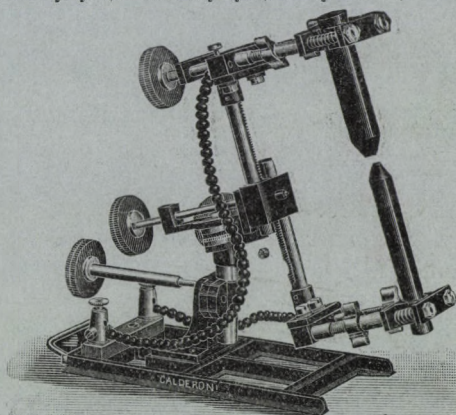
legjobb minőségű és felette erős szerkezetű (mellékelt ábra szerint) mely hajtócsavarok segítségével minden irányban könnyen mozgatható, 110—220 volt feszültségű egyen- vagy váltóáramhoz, 5—50 Ampère áramerősségig használható.

Ára K 120.—

Elektromos ívlámpa

egyszerűbb és könnyebb szerkezetű.

Ára K 90.—



Borszesz-izzófénylámpa légsűrítővel ellátva, mely 300 gyertya-fény erejű világítást szolgáltat. Ára teljesen felszerelve K 50.—

Háromlábú asztalállvány, mely hajtócsavar-szerkezet segítségével magasabbra és mélyebbre állítható, felső lapja pedig a vetítőkészülék által esetleg megkívánt szög alá, illetve ferde állásba hozható. Ára K 110.—

Vetítési ernyő finom vászonból 200 cm. négyzetben, gyűrűkkel ellátva. Ára K 8.—

Ernyő-állvány fenti ernyő részére, mely könnyen és gyorsan szétszedhető. Ára szekrényben K 30.—

Vetítési ernyők zsinórral felhúzzható szerkezettel. — Ezen ernyők legcélszerűbben a falra erősítendő 2 vastámaszra szerelendők, azonban bárhová, esetleg közvetlenül a falra is felerősíthetők. — Az ernyők árai a következők:

	200	240	300	360	420	480 cm. négyzetben
Ára	45.—	65.—	90.—	145.—	200.—	240.— korona.

Calderoni mű- és tanszervállalat részvénytársaság, Budapest, IV., Váci-utca 50.

Részletes nagy árjegyzék vetítőkészülékeinkről munkában van.

50255

MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI LAPOK

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT MEGBIZÁSÁBÓL

SZERKESZTIK

FEJÉR LIPÓT és ZEMPLÉN GYŐZŐ

HUSZONHARMADIK ÉVFOLYAM

VI—VIII. FÜZET

1914

OKT. — DECZ.

BUDAPEST

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT

1914.



TARTALOM.

	Lap
KÖNIG DÉNES: König Gyula utolsó művéről	291
EGERVÁRY JENŐ: Az integrálegyenletek egy osztályáról	303
LUKÁCS FERENCZ: A Laplace-sorról	356
KÜRSCHÁK JÓZSEF: Kitűzött feladat	378
A Matematikai és Fizikai Társulat XXI. tanulmányversenye	379
A Matematikai és Fizikai Társulat XXI. tanulmányversenyén b. Eötvös Loránd-díjjal jutalmazott dolgozatok:	
I. Zsigány Ferencz dolgozata	381
II. Prónai Jenő dolgozata	384

Lapunk e hármaskötete kizárólag matematikai tartalmu, mert Zemplén Győző szerkesztőtársam hadba-vonult. Ezért a következő évfolyamban, megfelelő arányban, a fizikai tárgyu cikkek lesznek túlsúlyban.

Fejér Lipót.

A folyóirat szellemi részét illető közlemények (cikkek, feladatok, stb.) a szerkesztőkhöz küldendőek, és pedig a matematikai tárgyuak *Fejér Lipót (V., Falk Miksa-utca 15.)*, a fizikai tárgyuak pedig *Zemplén Győző (I., Fehérvári-út 54/a)* címére. T. munkatársainkat kérjük, hogy kéziratukra mindenkor írják fel a pontos címet, melyre a korrekturák küldendőek.

Minden szerzőnek 25 péld. különlenyomatot adunk üres borítékkal (kivéve az *Irodalom, Fizikai Szemle, Fizikai Laboratorium, Megoldott feladatok* stb. rovatokban megjelent közleményeket). Címzett borítékot vagy több különlenyomatot csak külön kívánságra, a megfelelő költségek felszámításával adhatunk.

Társulati mondanivalók. A huszonharmadik társulati év 1914 január elsején kezdődött.

A *tagsági díj* (Budapesten 10 korona, vidéken 6 korona) az Alapszabályok VII., 12. §-a szerint az év első negyedében esedékes. Kérjük t. Tagtársainkat, szíveskedjenek a tagsági díjat a társulat pénztárnoka: *Privorszky Alajos* (VII., Ilka-u. 32) címére beküldeni. A befizetések megkönnyítése végett jelen füzetünkhöz postai befizető lapokat mellékelünk.

Kérjük tagtársainkat, hogy mindazokat, akik a matematika vagy fizika iránt érdeklődnek, tagokul ajánlják. A tagajánlások és a társulat ügyeire vonatkozó egyéb kérdések *Zemplén Győző* ügyvivő titkár fenti címére intézendők.

A reklamációk, címváltozások a pénztárnokhoz intézendők

MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI LAPOK

E folyóirat évenként 8, legalább három fvényi füzetben jelenik meg, a nyári hónapok kivételével, a hó második felében.

Előfizetési díj egy évre 10 K, A Matematikai és Fizikai Társulat tagjai a folyóiratot tagságdíjuk fejében kapják.

23. évfolyam.

1914, okt.—decz.

6—8. füzet.

KÖNIG GYULA UTOLSÓ MŰVÉRŐL.

Atyám hátrahagyott munkája, melyen 1904 óta, egészen 1913 ápr. 8-án bekövetkezett haláláig dolgozott, ez év első napjaiban jelent meg, a lipcsei *Veit und Co.* cég kiadásában, német nyelven.¹ A 16^{1/2} ives könyv címe: «*Neue Grundlagen der Logik, Arithmetik und Mengenlehre.*»² Csupán egynéhány fontosabb eszméjének igen vázlatos és lehetőleg objektív ismertetésére szorítkozhatom.

Mielőtt erre rátérnék, röviden fel akarom említeni a szerző előbbi halmazelméleti munkálkodását; hiszen a «*Neue Grundlagen*» is e problémák talaján keletkezett. Az egy- és többméretű continuum æquivalenciájára adott új bizonyítása SCHOENFLIES «*Bericht*»-je³ és F. KLEIN «*Elementarmathematik*»-ja⁴ révén elterjedt a szakemberek körében a nélkül, hogy ő maga e bizonyítást publikálta volna. Az 1904. évi heidelbergi matematikus kongresszuson tartott előadása, ha a continuumproblémát nem intézi is el (mint szerzője eredetileg gondolta), az általános halmazelmélet egy igen fontos tételének bizonyítását tartalmazza, mely tétel alkalmazása a continuum számosságá-

¹ Az itt következő ismertetés lényegileg megegyezik azzal az előadással, melyet az ismertető az első matematikai-philosophiai kongresszuson (Páris, 1914 ápr. 6—8.) tartott.

² A szerző életében a könyvnek csak egy rövid töredéke jelent meg: «Az igaz fogalmának formalizálása a synthetikus logikában» (A Magyar Filozófiai Társaság Közleményei, 1910). — Ugyane folyóirat 1914. közölte a könyv teljes első fejezetét «Az alaptények» czímen.

³ *Entwicklung der Mengenlehre*, I. (1. kiadás 23. l. és 2. kiadás 57. lap.)

⁴ *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus*. I., 562. l.

nak mindmáig ismert legáltalánosabb tulajdonságának felismerésére vezette szerzőjét. Már a halmazelmélet alapjaival való foglalkozás eredményének tekinthető az a szemléletes bizonyítás, melyet az æquivalencia-tétel számára a párisi *Comptes Rendus*-ben és e Lapokban¹ 1906-ban közölt. Nemcsak legegyszerűbb bizonyítását nyújtja itt e nevezetes BERNSTEIN-féle tételnek, de a bizonyítás egyszersmind elvi fontosságú. A halmazelmélet alapjaira vonatkozó további publikációira nem akarok itt kitérni, mert az ezekben foglalt nézeteit később részben módosította. Valóban: csak élete utolsó éveiben jutott el e problémák azon végleges megoldásához, melynek az ismertetendő munka keletkezését köszöni.

A könyv tengelyét azok a fejezetek alkotják, melyek a logika formalizálásáról és ellentmondásnélküliségéről szólnak (IV. és V. fejezet.) Itt természetesen az «igaz»-ság fogalma játszik nevezetes szerepet. Annak kijelentésével, hogy A -t igaznak tartom, mindig csak öntudatomnak egy bizonyos állapotát konstátálom. Az igaz fogalmában rejlő ezen szubjektivitáson és változóságon a «*gondolkodási tartomány*» (Denkbereich) alapúlvételével segítünk, mely épen öntudatunk meghatározott állapotát objektiválja. A legegyszerűbb esetekben egy ily gondolkodási tartomány a benne foglalt élmények felsorolásával írható le. Komplikáltabb esetekben az *involúció* fogalmát is használjuk:

$A \text{ inv. } B$

azt jelenti, hogy A -val együtt B is élménye gondolkodási tartományunknak, anélkül, hogy az «involvit» szónak «logikai» értelmet adnánk. Ha

$A \text{ inv. } B \text{ és } B \text{ inv. } C$

a gondolkodási tartomány leírásában szerepel, akkor

$A \text{ inv. } C$

¹ XV. évfolyam, 253. l.

is mint ilyen involúció tekinthető. Ennek a *közvetlen tapasztalat*-nak sincs a logikához, a syllogismushoz semmi köze. Épúgy nincs szó «a kizárt harmadik elvé»-ről, midőn e két tény közül: «*A bent van gondolkodási tartományban*», «*A nincs bent a gondolkodási tartományban*», csak az egyiket engedjük meg és másfajta gondolkodási tartományt *önkéntesen* lehetetlennek deklarálunk. Mindezen megállapítások tisztára közvetlen szemléletek, melyek *megelőzik* a logikát. Hangsúlyoznunk kell, hogy emellett egy gondolkodási tartomány tartalmazhat két ellentmondó állítást, annál is inkább, mert az «ellentmondó» szó csak a logikai következtetés bevezetésével nyer értelmet.

A szerző fejtegetéseinek egyik kardinális pontja — és e megjegyzésnek a halmazelméletben fellépő logikai nehézségek eloszlatásában is alapvető szerepe van — hogy a gondolkodási tartományban foglalt élmények a gondolkodási tartományon tett tapasztalatoktól szigorúan megkülönböztetendők. A most említett «*A inv. B*» pld. tulajdonsága lehet egy gondolkodási tartománynak, anélkül, hogy a gondolkodási tartományban foglalt élménynek kellene lennie. Ennek megfelelőleg a két jelnek ($Q = \text{qualitas}$):

$A \text{ inv. } (B \text{ inv. } C) \text{ és } A \text{ inv. } Q (B \text{ inv. } C)$

egészen különböző jelentése van. A második ezt mondja: ha *A bent* foglaltatik, mint élmény gondolkodási tartományunkban, akkor *B*-vel együtt *C* is benne foglaltatik. Az első pedig ezt: ha az *A* élménye a gondolkodási tartománynak, akkor «*B inv. C*» is élménye. Ha most már egy gondolkodási tartomány teljesen le van írva, akkor nem csupán a *benne foglalt* élményekre vonatkozhatnak vizsgálódásaink, hanem azokra is, melyeket e gondolkodási tartományon, mint tulajdonságokat észlelünk, anélkül, hogy ez utóbbi élményeknek okvetlenül a gondolkodási tartományban kellene foglaltatniuk.

A logika formalizálásánál mindenekelőtt az ily kijelentés formalizálására van szükség: «az *A* élmény nem különbözik a

B élménytől», a melyre a szerző, ha A -nak x és B -nek y a «jele», az

$$x \equiv y$$

jelet használja (« x isolog y -hoz»). Fontos megjegyzés, hogy itt nem az *absolut azonosság* fogalmáról van szó; arról van mindig csak szó, hogy a két élmény «meghatározott és egyszersmindenkorra megállapított vonatkozásokban» nem különbözik egymástól. A mindennapi beszédben, midőn «ugyanarról a könyvről», «ugyanarról a véleményről» van szó, szintén csak így értendő ez az «ugyanaz» szó. Az isologia \equiv jelét az

$$x \equiv x \quad \text{és} \quad [x \equiv y] \equiv [y \equiv x]$$

logikai alapformák formalizálják. Hasonlóképen történik a conjunctio (\times), disjunctio (\div) és implicatio (\subset) fogalmának formalizálása, melyek rendre az «és», a «vagy», illetve a «tehát» szónak felelnek meg. A syllogismust pld. az

$$[(x \subset y) \times (y \subset z)] \subset [x \subset z]$$

logikai alapforma formalizálja.

A legnehezebb, de egyszersmind legterményesebb feladat itt az «igaz» fogalmának formalizálása. E fogalom, mint már említettük, mindig bizonyos gondolkodási tartományra vonatkozik. Ennek értelmezését az

$$X \text{ inv. } [X \sim v]$$

involúcióval egészítjük ki: «ha X bent van a gondolkodási tartományban, akkor X gondolkodási tartományunkban igaz». Az olyan gondolkodási tartomány, melyre ez az involúció érvényes *igazságtartomány*-nak (Wahrheitsbereich) neveztetik. Lehet, hogy « Z elfogadhatatlan tény» (jelben $Z \sim v'$) van bent gondolkodási tartományunkban, ilyenkor « Z gondolkodási tartományunkban hamis». Lehetséges az is, hogy sem « $Z \sim v$ », sem « $Z \sim v'$ » nincs bent tartományunkban. Ilyenkor a Z élmény ki van rekesztve öntudatunkból és mindaddig, míg öntudatun-

kat, azaz gondolkodási tartományunkat nem bővítjük, Z sem igaznak, sem hamisnak nem fogadható el.

Az ilyen «értelemben vett «igaz $(\neg v)$ » és «hamis $(\neg v')$ » fogalmát nyolcz logikai alapforma formalizálja, melyek közül példaképen kettőt ideirunk:

$$\begin{aligned} [(x \neg v') \neg v'] &\equiv [x \neg v] \\ [(x + y) \neg v'] &\equiv [(x \neg v') \times (y \neg v')]. \end{aligned}$$

Összetett jelformák képzésére a szerző bizonyos $S\left(\frac{x}{U}\right)$, $S\left(\frac{x, y}{U, V}\right)$, stb. «substitutio»-kat vezet be, melyekre itt nem térhetünk ki; formális alkalmazásukat egy példa is eléggé megvilágítja:

$$S\left(\frac{x, y}{U, V}\right) (x \equiv y)$$

új jele az

$$U \equiv V$$

formának.

Az itt vázolt fejtegetések formailag rendkívül hasonlítanak a BOOLE-tól alapított *Algèbre de la Logique*-ra — de e meg-egyezés tisztára formai. Először is «a logika algebrája» olyan gondolkodási tartománnyal operál, mely minden élményt, mint elutasíthatatlant, vagy mint elfogadhatatlant tartalmaz. A szerző nem habozik ilyen gondolkodási tartományt lehetetlennek jelen-teni ki, anélkül, hogy az ehhez kapcsolódó ismerettani kérdés taglalásába bele kellene mennie; hiszen, ha ilyen gondolko-dási tartomány lehetséges, akkor az ő vizsgálódásaiból sincs kizárva épúgy, a mint pl. az isologia jelének is az abszolút identitás értelme is adható, ha ez utóbbi fogalom egyáltalában jogosult. Elsősorban az az előnye van a logika itt adott for-malizálásának a logika algebrájával szemben, hogy új eredmé-nyeket is szolgáltat, mert a logikai gondolkodás törvényeinek pontos képét szolgáltatja, ép úgy, mint a *Mécanique céleste* pontos képét adja a bolygók mozgásának.

Ezen új eredmények épen az ellentmondásnélküliség problé-májánál lépnek fel.

A már ismertetett logikai alapformákon kívül négy *logikai principium*¹ szolgál még az egész logika felépítésére:

$$[U \equiv V] \subset \left[S \left(\begin{smallmatrix} x \\ U \end{smallmatrix} \right) W \equiv S \left(\begin{smallmatrix} x \\ V \end{smallmatrix} \right) W \right] \quad (I)$$

$$UC [U \sim v]; [U \sim v] \subset U \quad (W)$$

(ez azt mondja, hogy gondolkozási tartományunk: igazságtartomány)

$$[U \times (UC V)] \text{ inv. } V \quad (D)$$

$$W \text{ inv. } S \left(\begin{smallmatrix} x \\ U \end{smallmatrix} \right) W. \quad (S)$$

E principiumok alkalmazása a logikai alapformákra — és ez a gondolkodási folyamat épen az, a mi logikai dedukciónak neveztetik — hozza létre azokat a «*logikai formák*»-at, melyek a *logika gondolkodási tartományá*-t alkotják [A logikai dedukcióban szereplő «(időbeli) egymásután» és «(véges) rendszám» fogalmának synthesisére, hol a véges halmazokra vonatkozó teljes indukció játssza a főszerepet, itt nem térünk ki].

E gondolkodási tartomány ellentmondásnélkülisége az ismeretlen fundamentális problémája. Be kell látnunk, hogy ha $L \sim v$ logikai forma, akkor $L \sim v'$ nem lehet az. E tény — az ellentmondás tétele — az

$$[(L \sim v) \times (L \sim v')] \sim v'$$

forma interpretációja. Azt hihetné valaki, hogy a logikai alapformák közé véve fel e formát, ezzel az egész probléma el van intézve. De e megjegyzés csupán a gondolkodási tartományban foglalt élmények és a gondolkodási tartományon tett tapasztalatok összezavarásán alapszik. Ha a logika vezet ellentmondáshoz, akkor e forma felvétele a logikai alapformák közé ezen mitsem változtat. Az ellentmondásnélküliséget, mint a logika

¹ A «*A*-forma» ideiglenes elnevezést, a melyet a szigorú következetesség nem nélkülözhet, itt rövidség kedvéért mellőzzük. (L. a könv. 110. stb. lapjait.)

gondolkodási tartományának tulajdonságát akarjuk belátni, anélkül, hogy ezért az ellentmondás tételének a logikai formák között helyet kellene foglalnia. E megjegyzés is mutatja az ellentmondás tételének különleges szerepét a logikában.

A logika ellentmondásnélküliségének szemléltetése most már a következőképen történik. Egészen önkényesen szabályokat állapítunk meg, melyek szerint bizonyos formák *P*-formáknak, mások *Q*-formáknak neveztetnek, de oly módon, hogy bármely forma vagy csak *P*-formának, vagy csak *Q*-formának neveztetik. Ezek mellett lesznek *N*-formák is, melyeket szabályaink sem *P*, sem *Q*-formáknak nem statuálnak. Részletes és kimerítő vizsgálat most már evidenciába hozza, hogy először minden logikai alapforma és azután, hogy általában minden logikai forma: *P*-forma. Ha most már *L* tetszőleges logikai forma és így a (*W*)-princzipium szerint $L \sim \sim v$ is az, akkor kiderült, hogy ez az $L \sim \sim v$ egyszersmind *P*-forma. Ekkor azonban $L \sim \sim v'$ nem lehet logikai forma, mert akkor azt a szemléleti eredményt kellett volna nyernünk, hogy az *L*-forma *Q*-forma.

Az egész munkát teljesen félreérténé az, ki az itt röviden vázolt szemléleteket syllogismusokképen fogná fel. Az egyes lépések csak közvetlen szemléleteket írnak le és nincs még szó alkalmazásuknál logikai törvények alkalmazásáról. (A logikai gondolkodással együtt keletkezett nyelv logikai vonatkozású fordulatai csak megkönnyítik e félreértést.) E szemléleti procezsusokhoz járult azután az a szemléleti postulatum, mely szerint semmiféle dolog sem lehet önmagától különböző. Természetesen az ellentmondásnélküliség bizonyításánál csak arról lehetett szó, hogy a vizsgálatokat korlátozottabb szemléleti tartományba szorítsuk be, hol az ellentmondásnélküliség evidenciájára való hivatkozás teljesen, vagy legalább is nagyobb mértékben elégit ki minket. Az ellentmondásnélküliség problémájának ilyenén redukálása kétségtelenül egyik legfőbb érdeme a könyvnek.

A logika gondolkodási tartományához hasonlóan egyéb disciplinák is tárgyalhatók. A logikai alapformáknak minden más

gondolkodási tartományban is szerepelniök kell, de hozzájuk járulnak bizonyos *axiomatikus alapformák*, melyek az illető disciplina specziális axiomáit fejezik ki. Egy ily általánosabb axiomatikus gondolkodási tartományban a logikai dedukciót ismét ugyanaz a négy princípium állapítja meg. Még a logikai fogalmak körében maradunk, ha a logikai alapformákat a következő axiomatikus formával egészítjük ki:

$$[x \subset y] \subset [(y \sim v') \subset (x \sim v')],$$

melynek interpretációja ez: «ha x -ből következik y , akkor y hamisságából következik x hamissága». Egyáltalában nem szükségszerű logikai törvény ez. E tévedésre ismét csak a gondolkodási tartományban foglalt élményeknek és a gondolkodási tartomány tulajdonságainak összezavarása, az «abszolút igazság» előitélete készíthet. Mégis belátható, hogy ezen új axioma statualásával keletkező új gondolkodási tartomány sem tartalmaz ellentmondást. Ennek belátása, a P - és Q -formák megkülönböztetésével, épúgy történik, mint a «tisza» logika gondolkodási tartományára történt.

Alapvető most már a halmazelmélet megalapozására, hogy a halmazok is ily axiomatikus gondolkodási tartománnyal értelmezhetők; az ezekben foglalt formák mindenekelőtt az

$$a \text{ qual. } G \text{ és } x \text{ rel. } M$$

alakot mutatják. Ezek interpretációja: « a -nak megvan a G tulajdonsága» és « x az a -vonatkozásban van M -hez.» Ez az M épen az értelmezendő halmaz. Tartalmazza továbbá az ily gondolkodási tartomány azokat a formákat, a melyek e kétfajta formából logikai dedukcióval azaz négy princípiumunk alkalmazásával keletkeznek.

Hangsúlyoznunk kell az itt szereplő a index szerepét. A szerző szerint egy M halmazt elemei *nem* határozzák meg; ugyanazon elemek egy a -halmazt és egy tőle különböző, azaz vele nem minden vonatkozásban megegyező β halmazt is meghatároznak

stb. Míg eddig a halmazelméletben fellépett logikai nehézségek elhárítására a halmazfogalom megszorításával próbálkoztak, addig itt tulajdonképen az eddig figyelembe vett halmazfogalom *általánosításával* van dolgunk, mely pl. RUSSELL antinómiájának is teljes megnyugvást nyújtó magyarázatát adja. T. i. csak az önmagukat nem tartalmazó α -halmazok α -halmaza vezet ellentmondáshoz, míg ugyanezen α -halmazokból, mint elemekből alkotott β -halmaz már teljesen korrektül értelmezett halmaz.

A fentebb vázolt módon (axiomatikus gondolkodási tartományokkal) értelmezett bizonyos halmazokra — melyeket, mint-hogy CANTOR csak ilyeneket tárgyalt, a szerző CANTOR-féléknek nevez — a megfelelő gondolkodási tartomány ellentmondás nélküli volta, azaz a halmaz consistentiája, a P - és Q -formák módszerével szemléltethető. Az így konstataált ellentmondás nélküliség az egész gondolkodási tartományon tett tapasztalat, mely — ismételjük — nem okvetlenül élménye e gondolkodási tartománynak magának. Azt kell tulajdonképen mondanunk, hogy egy gondolkodási tartomány megismerésére épen ezek a kész tartományon tett tapasztalatok az értékesebbek, az újak, mert a gondolkodási tartomány eredeti leírásában nem foglaltatnak bent. A szó legtágabb értelmében vett tapasztalati tételek ezek. Míg azonban a közönséges, a kívüllágon tett tapasztalatok többé-kevésbbé homályosak, addig itt saját értelmünk alkotásain tett tapasztalatokról van szó, azaz oly alkotásokon tett tapasztalatokról, melyeket teljességükben át tudunk tekinteni.

A közönséges egész számok (numeratorok) végtelen halmazára vonatkozó teljes indukció tétele is mint egy gondolkodási tartományon tett tapasztalat adódik, anélkül, hogy e tétel bentfoglaltatnék a közönséges egész számokat értelmező gondolkodási tartomány élményei között. E gondolkodási tartományra vonatkozó logikai dedukció szemlélete nyújtja a teljes indukció tételét.

Hasonlóképen a ZERMELO-féle *Auswahlprinzip*-et is egy gon-

dolkodási tartomány szemlélete szolgáltatja, legalább is oly CANTOR-féle halmazokra, melyeknek elemei maguk is CANTOR-féle halmazok [később a continuum is épen mint ilyen (úgynevezett ZERMELO-féle) halmaz értelmeztetik].

Az eddig ismertetett alapon történik most már annak az axiomatikus gondolkodási tartománynak értelmezése is, mely az aritmetikának (előbb a közönséges egész számok, majd a valós számok aritmetikájának) hű képét adja. Ezt a matematikai $+$, \times , $<$, $=$ jelekkel jelzett fogalmak formalizálása előzi meg. A matematikus számára alapvető fontosságú e tartomány ellentmondásnélküliségének szemléltetése. Ez ismét a P - és Q -karakterű formák megkülönböztetésén alapszik, a mely oly szabályokkal adatik meg, hogy ezek szerint pl. $3 = 4$ nem lehet a gondolkodási tartományba tartozó forma, mert különben P -formának kellene lennie; már pedig ugyane szabályok szerint ilyen egyenlőség sohasem P -forma.

Teljesen lehetetlennek látszik e vizsgálatok részleteit röviden jellemezni. Meg kell itt tehát elégednünk azzal, hogy rámutassunk arra a lényeges különbségre, mely ezt a tárgyalást a szokásos axiomatikus tárgyalásoktól — melyekkel sok részletében formailag megegyezik — nagyon is megkülönbözteti. Az egyik jellegzetes vonása e vizsgálatoknak (a synthetikus logikának) a gondolkodási tartomány alapúl fektetése, melyre itt talán nem kell újból kiterjeszkednünk. A másik: a «bizonyítás»-ban fellépő két momentumnak szigorú szétválasztása. «Bizonyítás» — a mint e szót rendszeren használják — nemcsak logikai dedukciót jelent, tehát a logikai elvek alkalmazását, hanem — és pedig lényeges részeiben — egyszersmind az axiómákkal megállapított gondolkodási tartományon tett tapasztalatokat is. Ilyen tapasztalat játszsa pl. a főszerepet minden *deductio ad absurdum*-nál, mely tehát tulajdonképen nem is dedukció, mert a szóbanforgó gondolkodási tartomány ellentmondásnélküliségén alapszik és ez nem a gondolkodási tartományban fogalt élmény, hanem rajta tett tapasztalat. (Még ha véletlenül bent van is az ellentmondás elve a gondolkodási tartomány

élményei között, *nem* ezen az élményen, hanem a teljes gondolkodási tartomány egy tulajdonságán alapszik a *deductio ad absurdum*). Így pl. midőn HILBERT, «Grundlagen der Geometrie»-jában, mely egy disciplina formalizálásának mintaszerű példája, bármely két derékszög egyenlőségét *deductio ad absurdum*-mal bizonyítja, nem csupán axiómáiból következtet, hanem teljes rendszerének egy tulajdonságát, t. i. ellentmondásnélküliségét is felhasználja. A gondolkodási tartományokon tett ily tapasztalatok alkotják tudásunk tulajdonképeni alapját. E tapasztalatok evidenciája tulajdonképen csak gondolkodásunk megbízhatóságába vetett hit; de e hit megdönthetetlen, mert egy-egy gondolkodási tartomány öntudatunk spontán aktusa. Ezen evidencia tagadása egyértelmű volna öntudatunk tagadásával.

Az aritmetika megalapozására vonatkozó fejtegetésekhez csatlakozik a «nem-véges» és a «végtelen» jelzőkkel jelzett halmazoknak, valamint a «végesen definiálható»-ság fogalmával kapcsolatos antinomiák vizsgálata.

A munka utolsó két fejezete ezután a kifejtett kritikai elvek alkalmazását adja a halmazelmélet felépítésére. Kiderül itt, hogy CANTOR-nak és tanítványainak zseniális alkotása teljes épségben fenttartható, beleértve ZERMELO *Wohlordnungssatz*-át is (legalább is az ú. n. CANTOR-féle halmazokra vonatkozólag). A «számosság», «æquivalencia», «jólrendezettség» fogalmával kapcsolatos alapvető tételek teljes részletességgel tárgyaltnak és különös gondot fordít a szerző BURALI-FORTI antinomiájának tárgyalására. A mint a halmaz és eleme közötti kapcsolatban ($a \text{ rel. } M$) e két dolog vonatkozása (rel.) nem tekinthető mindig azonosnak, épúgy áll a dolog arra a vonatkozásra is ($a < b$), melyben egy rendezett halmaz két eleme áll egymáshoz. BURALI-FORTI ellentmondása is azzal a megjegyzéssel szűnik meg, hogy a transzfinit rendszámok rendezésénél fellépő $<$ -reláció különbözőnek veendő attól a rendi relációtól, mely e rendszámok értelmezésénél szerepel.

A könyv utolsó pontjában bevezetett ordinátor-fogalomnak

az említett ZERMELO-féle bizonyításhoz kellett volna vezetni, de a toll kihullott a szerző kezéből mielőtt ezt elvégezhette volna. Lényegileg azonban egészen befejezett alakban hagyta hátra vizsgálódásainak eredményeit, melyek teljes megnyugvást hoztak létre számára oly problémákkal szemben, melyekre ő is — mint annyi más — éveken át nem talált kielégítő megoldást.

Budapest, 1914 május 15.

König Dénes.

AZ INTEGRÁLEGYENLETEK EGY OSZTÁLYÁRÓL.

Bevezetés.

Jelen dolgozat tárgya az integrálegyenletek egy osztályának vizsgálata, mind az általános megoldás, mind az alkalmazások szempontjából. Ezen osztályhoz tartozó integrálegyenletek általános alakja a következő:

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(\xi - x) \varphi(\xi) d\xi = f(x); K[\tau + (b-a)] = K(\tau).$$

Karakterisztikus tulajdonságuk tehát abban áll, hogy magjuk: $K(x, \xi)$ csupán a változók $\xi - x$ különbségétől függ, s ezen különbségnek az integráció intervalluma, azaz $b - a$ szerint periodikus függvénye.

Ily integrálegyenletekkel való behatóbb foglalkozásra először FEJÉR tanár úr szóbeli közlése által indítottam, ki viszont I. SCHURTól értesült ezeknek a FOURIER-sorokkal való kapcsolatáról. Később, midőn az irodalmat átkutattam, tűnt ki, hogy ily integrálegyenletek az analízis, valamint a matematikai fizika problémáiban való alkalmazásaiknál fogva is figyelemreméltók, mely körülményre a következőkben még vissza fogunk térni.

Megjegyezhetjük továbbá, hogy ily maggal bíró integrálegyenletek hasonló viszonyban állanak az általánosokhoz, mint pl. az O. TOEPLITZ által vizsgált, ú. n. L -formák¹ az általános végtelen sok változós quadratikussal alakokhoz, s ép úgy, mint az.

¹ O. TOEPLITZ: Theorie der L -Formen (Math. Ann. LXX. köt. 351—76.).

utóbbiak, az általános theoria számára discutálható, konkrét példákat szolgáltatnak.

Mindezekről eltekintve azonban, ezen integrálegyenletek legfigyelemreméltóbb tulajdonságát abban látjuk, hogy rájuk nézve *sikerül a megoldásnál szereplő összes mennyiségek, azaz a FREDHOLM-féle transcendensek, valamint a sajátértékek és sajátfüggvények explicit kiszámítása az algebraiból való határátmenetnek új, az eddigiektől eltérő úton való elvégzése által.*

Ezen integrálegyenletekkel való foglalkozásom kapcsán ugyanis FEJÉR tanár úr annak megvizsgálására szólított fel, vajjon a közelítő egyenletrendszerből kiinduló határátmenet nem vezethető-e ily specziális magok esetében egyszerűbb s közvetlenebb úton, mint a milyen az általános $K(x, \xi)$ mag esetén lehetséges. A közelebbi vizsgálat mármost azt mutatta, hogy ily maggal bíró integrálegyenleteknél valóban lényeges egyszerűsödések állnak be, a mennyiben ez esetben a közelítő egyenletrendszer determinánsa *cyklikus*; nem szükséges tehát azt az integrálegyenletben szereplő λ parameter hatványai szerint kifejtteni, hanem az közvetlenül a λ -ban lineáris tényezők szorzataként állítható elő.

E ténynek két figyelemreméltó következménye van. Egyrészt az ily módon végzett határátmenet az ismert $D(\lambda)$ FREDHOLM f. transzcendenst nem hatványsor alakban, hanem primtényezős előállításban adja, melyből azonnal következik azon I. SCHUR által a $K(x - \xi) = K(\xi - x)$, azaz szimmetrikus mag specziális esetében először észlelt tény, hogy a sajátértékek a mag komplex FOURIER-együtthatóinak reciprokjai. Másrészt az itt szereplő konvergentia-bizonyításnál a HADAMARD f. determináns-tétel, mely az eddigiekben döntő szerepet játszott, természetesen egyáltalán nem jön alkalmazásba.

Ezen határátmenet elvégzése, illetve a megoldási formulák fölállítása képezi a dolgozat első s — mint hisszük, — leglényegesebb részét. A tárgyalást igyekeztünk oly alakban keresztülvinni — többször közismert tények ismétlése árán is, — hogy abban a lineáris egyenletrendszerekre vonatkozó tételeknek

az integrálegyenletekre való átvitele lehetőleg világosan tűnjék ki.

A nevezett határátmenet tudvalevőleg csak akkor alkalmazható, ha az integráció intervalluma véges. Miután azonban az említett alakú magok végtelen integrációintervallummal bíró, singuláris integrálegyenletekre is számos instruktív példát szolgáltatnak, kíváncsiaknak látszott ezeket is bevonni a tárgyalásba. Másodszori határátmenet útján valóban sikerül ezekre is a megoldási formulákat felállítani hasonló módon, mint a hogy a FOURIER f. integrál a FOURIER-sorból nyerhető. Természetesen mindkét esetben a nyert eredmények utólagos verifikációja szükséges.

Ezek után, a következő alkalmazásokra való tekintettel, az előbbi eredmények néhány általánosítását vezetjük le, nem határátmenettel ugyan, hanem a szereplő függvények sorbafejtethetőségének föltételezése alapján.

A második részben a korábban nyert eredmények néhány alkalmazását mutatjuk be. Elsősorban néhány reguláris, valamint singularis FREDHOLM f. egyenletre, mely utóbbiak közt a PICARD és HARDY által tárgyalt tipikus példák is szerepelnek.

A következő § a síkbeli DIRICHLET problemának egy egyszerű réteg potenciálja alakjában való megoldását tartalmazza kör és ellipsis esetére, mely megoldásokra PICARD egy rokontárgyú értekezése¹ adott suggestiót.

Az elektronelmélet mozgásegyenletei, mint P. HERTZ és G. HERGLOTZ megmutatták, oly változó határokkal bíró integrálegyenletre vezetnek, melynek magja szintén a változók különbségétől függ. Korábbi eredményeinknek ezen esetre való alkalmazásával közvetlenül nyerjük HERGLOTZ megoldási formuláit.

A potenciálmélet számos problémájában viszont hasonló maggal bíró VOLTERRA-egyenletek játszanak szerepet, melyeket ily problémákra először M. HAFEN alkalmazott² s egy általános megoldási formulát is levezetett. E formula levezetése céljából

¹ L. E. PICARD: Rendiconti del Circolo matematico di Palermo: XXIX. 1910. pp. 79—97.

² L. M. HAFEN: Math. Ann. Bd. 69, pp. 517—37.

a VOLTERRA-egyenlet resolvens magját magából a VOLTERRA által adott sorból zárt alakban állítjuk elő s ebből könnyen jutunk HAFEN megoldási formulájához. Végül a nyert formulát alkalmazzuk BELTRAMI egy functionális egyenletének megoldására.

Legyen szabad még e helyen is legőszintébb köszönetemet kifejeznem dr. FEJÉR LIPÓT egyetemi tanár úrnak, e dolgozat készülése folyamán tanusított meleg érdeklődéséért és értékes tanácsaiért.

ELSŐ RÉSZ.

Legyenek $K(\tau)$, $f(\tau)$ a τ valós változó véges, négyzetükkel együtt integrabilis, véges variációjú függvényei. Továbbá az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy a FREDHOLM-féle, azaz konstans határokkal bíró integrálegyenletben az integráció határok 0 és 1, továbbá hogy $K(\tau)$ argumentumának az egység szerint periodikus függvénye, azaz $K(\tau+1) = K(\tau)$. Ekkor a megoldandó integrálegyenlet a következő alakot ölti:

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 K(\xi - x) \varphi(\xi) d\xi = f(x), \quad (1)$$

hol $f(x)$ identikusan zérus is lehet, mely esetben a

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 K(\xi - x) \varphi(\xi) d\xi = 0 \quad (1')$$

homogén integrálegyenlethez jutunk.

Ezen integrálegyenlet megoldásánál hasonló módon fogunk kiindulni, mint azt HILBERT tette az integrálegyenletekről írt első értekezésében. Az (1) integrálegyenletet ugyanis egyelőre csupán a $(0, 1)$ intervallum $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n}{n}$ osztáspontjaiban tekintjük kielégítendőnek s ugyanekkor a benne szereplő határozott integrált az ugyanezen osztáspontokra vonatkozó közelítő, véges összeggel helyettesítjük. Így egy lineáris egyenlet-rendszerhez, az (1) integrálegyenlet úgynevezett n -ik közelítő

egyenletrendszeréhez jutunk, melynek megoldása, mint egy tisztán algebrai problémáé, minden n -re explicit alakban elvégezhető.

Ha mármost az $n=\infty$ -re való határátmenet a megoldási formulákban elvégezhető s a közelítő egyenletrendszer megoldó formulái a nyert kifejezésekhez egyenletesen konvergálnak, úgy ezek, miután az említett közelítő egyenletrendszer $n=\infty$ -re az (1) integrálegyenletbe megy át, ennek megoldását fogják szolgáltatni.

1. §. Az algebrai problema megoldása.

Ha a kiírás egyszerűsítése kedvéért a

$$K\left(\frac{p}{n} - \frac{q}{n}\right) = K_{p-q}; f\left(\frac{p}{n}\right) = f_p; \varphi\left(\frac{p}{n}\right) = \varphi_p; \frac{\lambda}{n} = l; \quad (2)$$

($p, q=1, 2, \dots n$)

rövidített jelöléseket bevezetjük, úgy az (1) integrálegyenlethez tartozó n -ik közelítő lineár egyenletrendszer a következő:

$$\begin{aligned} \varphi_1 - l[K_{1-1}\varphi_1 + K_{2-1}\varphi_2 + \dots + K_{n-1}\varphi_n] &= f_1, &= 0 \\ \varphi_2 - l[K_{1-2}\varphi_1 + K_{2-2}\varphi_2 + \dots + K_{n-2}\varphi_n] &= f_2, &= 0 \\ \dots & & \\ \varphi_n - l[K_{1-n}\varphi_1 + K_{2-n}\varphi_2 + \dots + K_{n-n}\varphi_n] &= f_n, &= 0 \end{aligned} \quad (3), (3')$$

hol a második ($f_p=0$) eset az (1') homogén integrálegyenletnek felel meg.

Ezen egyenletrendszer megoldása céljából szükségünk van a következő determinánsokra:

$$D_n(l) = \begin{vmatrix} 1 - lK_0, & -lK_1, & \dots & -lK_{n-1} \\ -lK_{-1}, & 1 - lK_0, & \dots & -lK_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -lK_{-n+1}, & -lK_{-n+2}, & \dots & 1 - lK_0 \end{vmatrix} \quad (4)$$

$$\begin{aligned}
 & lD_n(\xi, x; l) = \\
 & \begin{vmatrix}
 lK(\xi - x) & -lK\left(\frac{0}{n} - x\right) & -lK\left(\frac{1}{n} - x\right) & \dots & -lK\left(\frac{n-1}{n} - x\right) \\
 lK\left(\xi - \frac{0}{n}\right) & 1 - lK_0 & -lK_1 & \dots & -lK_{n-1} \\
 lK\left(\xi - \frac{1}{n}\right) & -lK_{-1} & 1 - lK_0 & \dots & -lK_{n-2} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 lK\left(\xi - \frac{n-1}{n}\right) & -lK_{-n+1} & -lK_{-n+2} & \dots & 1 - lK_0
 \end{vmatrix} \quad (5)
 \end{aligned}$$

melyek a $K(\tau)$ függvény periodicitásából kifolyólag — s épen ebben áll a magra vonatkozó föltevésünk leglényegesebb következménye, — oly explicit alakra hozhatók, melyen a később szükséges határátmenet könnyen elvégezhető.

Ugyanis a $K(\tau)$ periodicitása, azaz $K(\tau+1)=K(\tau)$ reláció folytán

$$K_{-p} = K\left(-\frac{p}{n}\right) = K\left(\frac{n-p}{n}\right) = K_{n-p},$$

tehát a (4) determináns *cyklikus* s mint ilyen, tudvalevőleg lineár faktorok szorzatára bontható a következő módon:¹

$$D_n(l) = \prod_{k=0}^{n-1} \{1 - l[K_0 + K_1 \omega_k + K_2 \omega_k^2 + \dots + K_{n-1} \omega_k^{n-1}]\}, \quad (6)$$

hol $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{n-1}$ az n -ik egységgyököket jelentik, azaz $\omega_k = e^{\frac{2k\pi i}{n}}$. A $D_n(l)$ determinánst tehát, mely az l parameternek racionális, egész függvénye, közvetlenül primitényező előállításában nyertük.

Az (5) determinánst pedig, mely $D_n(l)$ -ből szegélyezés útján keletkezik, ez utóbbi minorai segítségével a következő módon állíthatjuk elő:

$$D_n(\xi, x; l) = D_n(l) K(\xi - x) + l \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{q=0}^{n-1} A_{pq} K\left(\xi - \frac{q}{n}\right) K\left(\frac{p}{n} - x\right),$$

hol A_{pq} a $D_n(l)$ p -ik sorában s q -ik oszlopában levő elemhez tartozó minort jelenti. Ha még fölhasználjuk azon tényt, hogy

¹ L. E. PASCAL: Determinanti, pp. 92—103.

egy ciklikus determináns egyenlő elemeihez tartozó minorok egyenlők, úgy nyerjük:

$$A_{pq} = A_{p-q} = \frac{1}{n} \frac{\partial D_n(l)}{\partial a_{p-q}}; \quad (a_0 = 1 - lK_0; \quad a_r = -lK_r) \quad (7)$$

$$A_{pq} = \frac{1}{n} D_n(l) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\omega_k^{p-q}}{1 - l[K_0 + K_1 \omega_k + K_2 \omega_k^2 + \dots + K_{n-1} \omega_k^{n-1}]},$$

tehát

$$D_n(\xi, x; l) = D_n(l) K(\xi - x) + \\ + \frac{l}{n} D_n(l) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sum_{p=0}^{n-1} \sum_{q=0}^{n-1} \omega_k^{p-q} K\left(\xi - \frac{q}{n}\right) K\left(\frac{p}{n} - x\right)}{1 - l \sum_{p=0}^{n-1} K_p \omega_k^p}. \quad (8)$$

Még egy a $D_n(l)$ s a $D_n(\xi, x; l)$ determinánsok közt fennálló fontos relatióra van szükségünk, melyet a következőképen vezetünk le. Írjunk az (5) determináns első sorában

$$K(\xi - x) \text{ helyébe } K\left(\frac{0}{n} - x\right) K\left(\xi - \frac{0}{n}\right) + \\ + K\left(\frac{1}{n} - x\right) K\left(\xi - \frac{1}{n}\right) + \dots + K\left(\frac{n-1}{n} - x\right) K\left(\xi - \frac{n-1}{n}\right) \cdot \text{et,} \\ K\left(\frac{q}{n} - x\right) \text{ helyébe } K\left(\frac{0}{n} - x\right) K\left(\frac{q}{n} - \frac{0}{n}\right) + \\ + K\left(\frac{1}{n} - x\right) K\left(\frac{q}{n} - \frac{1}{n}\right) + \dots + K\left(\frac{n-1}{n} - x\right) K\left(\frac{q}{n} - \frac{n-1}{n}\right) \cdot \text{et.}$$

Az így nyert determináns nyilván n determináns összegére bomlik s tehát következőképen írható:

$$l \sum_{q=0}^{n-1} K\left(\frac{q}{n} - x\right) D_n\left(\xi, \frac{q}{n}; l\right).$$

Ha pedig másrészt a keletkezett determináns 2-ik, 3-ik. . . $n+1$ -ik sorát rendre $K\left(\frac{0}{n} - x\right), K\left(\frac{1}{n} - x\right), \dots, K\left(\frac{n-1}{n} - x\right)$ -el szorozva, az elsőből levonjuk, úgy a következő kifejezést nyerjük:

$$D_n(\xi, x; l) - K(\xi - x) D_n(l)$$

s e kifejezések egyenlőségéből következik a

$$D_n(\xi, x; l) - K(\xi - x) D_n(l) = l \sum_{q=0}^{n-1} K\left(\frac{q}{n} - x\right) D_n\left(\xi, \frac{q}{n}; l\right) \quad (9)$$

fundamentális relatió, mely ξ , x és l -ben identikusan fennáll. Ha a következőkre való tekintettel még a

$$K_n(\xi, x; l) = \frac{D_n(\xi, x; l)}{D_n(l)}$$

kifejezést bevezetjük, úgy (9) átmegy a

$$K_n(\xi, x; l) - K(\xi - x) = l \sum_{q=0}^{n-1} K_n\left(\xi, \frac{q}{n}; l\right) K\left(\frac{q}{n} - x\right) \quad (10)$$

relatióba, mely x , ξ -ben identikusan fennáll minden oly l -re, melyre $D_n(l) \neq 0$.

Ezen előkészületek után a (3), (3') lineár egyenletrendszerek megoldása a következőképen végezhető. Először tegyük föl, hogy a tekintetbe vett l parameter érték mellett a rendszer $D_n(l)$ determinánsa eltűnik, azaz l egyenlő a

$$l_k = [K_0 + K_1 \omega_k + \dots + K_{n-1} \omega_k^{n-1}]^{-1} \quad (k=1, 2, \dots, n) \quad (11)$$

értékek valamelyikével. Ekkor a (3) inhomogén rendszernek általában nincs megoldása, míg a (3') homogén rendszer megoldását, ha $l=l_k$, a következő kifejezések adják:

$$\varphi_p^{(k)} = D_n\left(\xi, \frac{p}{n}; l_k\right); \quad \begin{matrix} (k=1, 2, \dots, n) \\ (p=1, 2, \dots, n) \end{matrix} \quad (12)$$

mint azt a (9) relatióból, ha ott $x = \frac{p}{n}$ és $D_n(l_k) = 0$ tesszük, közvetlenül beláthatjuk.

Ha ellenben $D_n(l) \neq 0$, vagyis a rendszer determinánsa nem tűnik el, úgy a (3') homogén rendszernek nincs nem-triviális megoldása, míg a (3) inhomogén egyenletrendszer megoldását a következő kifejezések adják:

$$\varphi_p = f_p + l \sum_{q=0}^{n-1} K_n\left(\frac{q}{n}, \frac{p}{n}; l\right) f_q; \quad (p=1, 2, \dots, n) \quad (13)$$

Ugyanis, ha ezen φ_p értékeket a (3) egyenletrendszerbe tesszük, úgy a helyettesítés eredménye:

$$\sum_{q=0}^{n-1} f_q \left\{ K_n \left(\frac{q}{n}, \frac{p}{n}; l \right) - K_{q-p} - l \sum_{r=0}^{n-1} K_{r-p} K_n \left(\frac{q}{n}, \frac{r}{n}; l \right) \right\} = 0$$

mely, mint a (10) relatióból közvetlenül látható, mindig teljesül.

2. §. A transcendens problémához való határátmenet.

Hogy a fenti algebrai probléma megoldásából a transcendens problema, azaz az integrálegyenlet megoldásához jussunk, a megoldási formulákban a határátmenetet kell elvégezni $n = \infty$ esetére. Tegyük föl először, hogy a

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|, \quad \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|^2$$

sorok, melyekben

$$c_k = \int_0^1 K(\tau) e^{2k\pi i \tau} d\tau$$

mindegyike konvergens. Ekkor az előbb nyert kifejezésekben a formális határátmenet minden nehézség nélkül elvégezhető s a következő eredményekre vezet.

Írjuk $D_n(l)$ -et most, tekintetbe véve a (6) kifejezésben szereplő rövidítéseket a következő alakban:

$$D_n(l) = \prod_{(k)} \left\{ 1 - \frac{\lambda}{n} \left[K\left(\frac{0}{n}\right) + K\left(\frac{1}{n}\right) e^{2k\pi i \frac{1}{n}} + \right. \right. \\ \left. \left. + K\left(\frac{2}{n}\right) e^{2k\pi i \frac{2}{n}} + \dots + K\left(\frac{n-1}{n}\right) e^{2k\pi i \frac{n-1}{n}} \right] \right\}. \quad (6')$$

Itt, valamint a következőkben a produktum vagy summa jel alatti (k) jelenti, hogy a produktum vagy summa tagjai

$$k = 0, +1, -1, +2, -2, \dots - \frac{n}{2} + 1, + \frac{n}{2} \\ \left(\text{ill. } - \frac{n-1}{2}, + \frac{n-1}{2}, \text{ ha } n \text{ páratlan} \right)$$

sorrendben veendők, mely, tekintettel a mennyiségek periodicitására, a $k=1, 2, \dots n$ sorrenddel æquivalens.

$n=\infty$ esetére az egyes tényezőkben szereplő summák határozott integrálokba s maga a $D_n(l)$ kifejezés a következő végtelen produktumba megy át:

$$\lim_{n=\infty} D_n(l) = D(\lambda) = \prod_{k=-\infty}^{+\infty} \left\{ 1 - \lambda \int_0^1 K(\tau) e^{2k\pi i \tau} d\tau \right\}, \quad (14)$$

mely az előbbi konvergentia feltevések folytán λ -ra nézve a komplex sík minden véges tartományában absolute és egyenletesen konvergens, tehát λ -nak transcendens egész függvényét állítja elő. Erre nézve bebizonyítjuk a következő

I. Segéd-tétel: A $D_n(l)$ racionális egész függvény $n=\infty$ -re egyenletesen konvergál $D(\lambda)$ -hoz minden oly λ -ra nézve, melynek absolut értéke egy tetszőleges positiv A szám alatt marad.

E célból meg kell mutatnunk, hogy tetszésszerű ε -hez megadható oly N egészszám, melyre

$$|D_n(l) - D(\lambda)| = \left| D_n\left(\frac{\lambda}{n}\right) - D(\lambda) \right| < \varepsilon, \text{ ha } |\lambda| < A \text{ és } n > N. \quad (15)$$

Vezessük be először a

$$c_k = \int_0^1 K(\tau) e^{2k\pi i \tau} d\tau; \quad \gamma_k = \frac{1}{n} \sum_{p=0}^{n-1} K\left(\frac{p}{n}\right) e^{2k\pi i \frac{p}{n}}$$

jelöléseket s határozzuk meg az m egészszámot úgy, hogy a következő föltételek teljesüljenek:

$$\left| D(\lambda) - \prod_{k=-m}^{+m} \{1 - \lambda c_k\} \right| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |\lambda| < 1,$$

továbbá minden n -re

$$\left| D_n(l) - \prod_{k=-m}^{+m} \{1 - \lambda \gamma_k\} \right| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |\lambda| < 1.$$

A második föltétel teljesíthető, miután

$$\left| D_n\left(\frac{\lambda}{n}\right) - \prod_{k=-m}^{+m} \{1 - \lambda \gamma_k\} \right| =$$

$$= \prod_{k=-m}^{+m} \left| \{1 - \lambda \gamma_k\} \cdot \left| e^{-\lambda \left(\sum_{k=-n}^{-m-1} + \sum_{m+1}^n \right) \gamma_k - \frac{\lambda^2 \theta}{2} \left(\sum_{k=-n}^{-m-1} + \sum_{m+1}^n \right) \gamma_k^2 - 1} \right| \right|, \\ (0 < \theta < 1)$$

s általában minden n -re:¹

$$\left| \left(\sum_{k=-n}^{-(v+1)} + \sum_{v+1}^n \right) \gamma_k \right| \leq 2 \sum_{k=v+1}^n |\gamma_k| \leq 4 \sum_{k=v+1}^{\infty} |c_k|, \quad (v < n)$$

tehát az előbbi szorzat első tagja véges korlát alatt marad s a második tetszőleges kicsinnyé tehető.

Miután m így módon fixirozva van, válasszuk n -et oly nagyra, hogy

$$\left| \prod_{k=-m}^{+m} \{1 - \lambda c_k\} - \prod_{k=-m}^{+m} \{1 - \lambda \gamma_k\} \right| = \\ = \left| \prod_{k=-m}^{+m} \left\{ 1 - \lambda \int_0^1 K(\tau) e^{2k\pi i \tau} d\tau \right\} - \prod_{k=-m}^{+m} \left\{ 1 - \frac{\lambda}{n} \sum_{p=0}^{n-1} K\left(\frac{p}{n}\right) e^{2k\pi i \frac{p}{n}} \right\} \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

A nyert egyenlőtlenségek összevonásából következik:

$$|D_n(l) - D(\lambda)| < \varepsilon. \quad q. e. d.$$

¹ Ugyanis az ismert POISSON f. summációs formula alapján:

$$\alpha_k = \frac{1}{n} \sum_{p=0}^{n-1} K\left(\frac{p}{n}\right) \cos \frac{2k\pi p}{n} = a_k + a_{n-k} + a_{n+k} + a_{2n-k} + a_{2n+k} + \dots$$

$$(a_k = \int_0^1 K(\tau) \cos 2k\pi \tau d\tau)$$

$$\beta_k = \frac{1}{n} \sum_{p=0}^{n-1} K\left(\frac{p}{n}\right) \sin \frac{2k\pi p}{n} = b_k - b_{n-k} + b_{n+k} - b_{2n-k} + b_{2n+k} + \dots$$

$$(b_k = \int_0^1 K(\tau) \sin 2k\pi \tau d\tau)$$

tehát

$$\sum_{k=v+1}^n |\gamma_k| = \sum_{k=v+1}^n |a_k + i\beta_k| \leq \sum_{k=v+1}^n |a_k| + |\beta_k| \leq \\ \leq \sum_{k=v+1}^{\infty} |a_k| + |b_k| \leq 2 \sum_{k=v+1}^{\infty} |c_k|.$$

A (8) alatti $D_n(\xi, x; l)$ kifejezésnél az $n = \infty$ -re való határátmenet a következő, egyelőre csupán formális eredményre vezet:

$$\begin{aligned} \lim_{n=\infty} D_n(\xi, x; l) &= D(\xi, x; l) = \lim_{n=\infty} D_n(l) K(\xi - x) + \\ &+ \lim_{n=\infty} \frac{\lambda}{n^2} D_n\left(\frac{\lambda}{n}\right) \sum_{(k)} \frac{\sum_{p=0}^{n-1} \sum_{q=0}^{n-1} e^{2k\pi i \frac{p-q}{n}} K\left(\xi - \frac{q}{n}\right) K\left(\frac{q}{n} - x\right)}{1 - \frac{\lambda}{n} \sum_{p=0}^{n-1} K\left(\frac{p}{n}\right) e^{2k\pi i \frac{p}{n}}} = \\ &= D(\lambda) K(\xi - x) + \lambda D(\lambda) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\int_0^1 \int_0^1 e^{2k\pi i (\tau - t)} K(\xi - t) K(\tau - x) d\tau dt}{1 - \lambda \int_0^1 K(\tau) e^{2k\pi i \tau} d\tau} = \\ &= D(\lambda) K(\xi - x) + \lambda D(\lambda) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{c_k^2 e^{2k\pi i (x - \xi)}}{1 - \lambda c_k} = D(\xi - x; \lambda), \end{aligned} \quad (16)$$

tehát a határfüggvény ismét csupán a $\xi - x$ különbségtől függ s mint könnyen belátható, λ -ban transcendens egész függvény. Erre nézve bebizonyítjuk a következő

II. Segédtelet: A $D_n(\xi, x; \lambda)$ λ -ban racionális, egész függvény $n = \infty$ -re egyenletesen konvergál $D(\xi - x; \lambda)$ -hoz minden oly λ -ra nézve, melynek abszolút értéke egy tetszőleges pozitív A szám alatt marad.

Először tegyük föl, hogy

$$\lambda = \frac{1}{c_{k_1}} = \frac{1}{c_{k_2}} = \dots = \frac{1}{c_{k_\mu}}$$

$D(\lambda)$ -nak μ -szörös gyöke. Ekkor a (16)-ban szereplő összeg véges (μ) számú tag összegére redukálódik, melynek mindegyikére az I. segédtelet alkalmazható.

Feltehetjük tehát, hogy λ nem gyöke $D(\lambda)$ -nak, azaz az

$$1 - \lambda c_k$$

mennyiségek véges δ alsó határ fölött maradnak. Ekkor a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{(k)} \frac{\sum_{p=0}^{n-1} \sum_{q=0}^{n-1} e^{2k\pi i \frac{p-q}{n}} K\left(\xi - \frac{q}{n}\right) K\left(\frac{p}{n} - x\right)}{1 - \frac{\lambda}{n} \sum_{p=0}^{n-1} K\left(\frac{p}{n}\right) e^{2k\pi i \frac{p}{n}}} =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\int_0^1 \int_0^1 e^{2k\pi i (\tau-t)} K(\xi-t) K(\tau-x) d\tau dt}{1 - \lambda \int_0^1 K(\tau) e^{2k\pi i \tau} d\tau} \quad (16')$$

konvergentia egyenletes az x, ξ varibilisek minden értékpárja mellett.

Először ugyanis m -et választhatjuk úgy, hogy egyrészt:

$$\left(\sum_{k=-\infty}^{-m-1} + \sum_{m+1}^{+\infty} \right) \left| \int_0^1 \int_0^1 e^{2k\pi i (\tau-t)} K(\xi-t) K(\tau-x) d\tau dt \right| =$$

$$= \left(\sum_{k=-\infty}^{-m-1} + \sum_{m+1}^{+\infty} \right) |c_k|^2 |e^{2k\pi i (x-\xi)}| < \frac{\varepsilon \delta}{3},$$

másrészt minden n -re ¹

$$\left(\sum_{k=-n}^{-m-1} + \sum_{m+1}^n \right) \left| \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{q=0}^{n-1} e^{2k\pi i \frac{p-q}{n}} K\left(\xi - \frac{q}{n}\right) K\left(\frac{p}{n} - x\right) \right| < \frac{\varepsilon \delta'}{3}$$

Miután m ily módon fixirozva van, válasszuk n -et oly nagyra, hogy egyrészt az

$$1 - \frac{\lambda}{n} \sum_{p=0}^{n-1} K\left(\frac{p}{n}\right) e^{2k\pi i \frac{p}{n}}; \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots \pm n)$$

mennyiségek mindegyike a véges δ' alsó határ fölött maradjon, másrészt a

$$\left| \sum_{k=-m}^{+m} \frac{\int_0^1 \int_0^1 e^{2k\pi i (\tau-t)} K(\xi-t) K(\tau-x) d\tau dt}{1 - \lambda \int_0^1 K(\tau) e^{2k\pi i \tau} d\tau} \right|$$

¹ Az itt előforduló summák hasonló módon becsülhetők meg, mint azt a 13. oldal jegyzetében tettük.

$$\left| -\frac{1}{n^2} \sum_{k=-m}^{k=+m} \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{q=0}^{n-1} \frac{e^{2k\pi i \frac{p-q}{n}} K\left(\xi - \frac{q}{n}\right) K\left(\frac{p}{n} - x\right)}{1 - \frac{\lambda}{n} \sum K\left(\frac{p}{n}\right) e^{2k\pi i \frac{p}{n}}} \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

minden x , ξ értékpárra teljesüljön. Ekkor a nyert egyenlőtlenségekből következik a (16') egyenletes konvergencia s ebből közvetlenül a II. segédttétel.

Ezen segédttételek bizonyításánál föltettük, hogy a

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|; \quad \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|^2$$

sorok mindegyike konvergens. A második sor minden négyzetével együtt integrálható függvényre konvergens, mint az az ismert BESSEL f. egyenlőtlenségből következik. Az első sor ellenben lehet divergens s ekkor a (14) kifejezés konvergentiáját azáltal biztosíthatjuk, hogy a k indexű tényezőkhöz az $e^{\lambda c_k}$ exponenciális mennyiséget csatoljuk.¹ Az így nyert

$$D(\lambda) = \prod_{k=-\infty}^{+\infty} \left\{ 1 - \lambda \int_0^1 K(\tau) e^{2k\pi i \tau d\tau} \right\} e^{\lambda \int_0^1 K(\tau) e^{2k\pi i \tau} d\tau} \quad (14')$$

transzcendens egész függvényre az I., II. segédttételekben kimondottak változatlanul fennállnak s hasonló módon bizonyíthatók, ha a bizonyításnál a (6') alatti $D_n(l)$ helyett a megfelelően módosított kifejezésből indulunk ki.

Az I. II. segédttételek alapján világos, hogy a $D(\lambda)$ és $D(\xi - x; \lambda)$ határfüggvények a (9)-ből eredő következő fundamentális relatiót elégítik ki:

$$D(\xi - x; \lambda) - K(\xi - x) D(\lambda) = \lambda \int_0^1 K(\tau - x) D(\xi - \tau; \lambda) d\tau, \quad (17)$$

¹ Könnyű fölismerni, hogy a (14) kifejezés ezen változtatása azonos azzal, melyet HILBERT végez a FREDHOLM f. sorokban (l. Erste Mitt. 81. old.) egy $\frac{1}{2}$ -nél alacsonyabb rendben végtelenné váló, tehát négyzetével együtt integrálható mag esetén. A mindkét esetben belépő exponenciális faktorok a további eredményeket egyáltalán nem befolyásolják.

továbbá hányadosuk:

$$K(\xi - x; \lambda) = \frac{D(\xi - x; \lambda)}{D(\lambda)}$$

minden oly λ érték mellett, melyre $D(\lambda) \neq 0$, a

$$K(\xi - x; \lambda) - K(\xi - x) = \lambda \int_0^1 K(\tau - x) K(\xi - \tau; \lambda) d\tau \quad (18)$$

relációt.

Ezen előkészületek után az $(1, 1')$ integrálegyenletek megoldása következésképen végezhető. Először tegyük föl, hogy a tekintetbe vett λ parameterérték mellett a $D(\lambda)$ transcendens eltűnik, azaz λ egyenlő a

$$\lambda_k = \frac{1}{c_k} = \frac{1}{\int_0^1 K(\tau) e^{2k\pi i \tau} d\tau}; \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (19)$$

értékek valamelyikével. Ekkor a $(1')$ homogén integrálegyenletnek van zérustól különböző megoldása, mint azt (17)-ből, ha ott $\lambda = \lambda_k$ tesszük, közvetlenül beláthatjuk. S a megoldó függvény (16, 17) szerint:

$$\varphi_k(x) = D(\xi - x; \lambda_k) = \lambda_k D'(\lambda_k) c_k^2 e^{2k\pi i (x - \xi)} = \text{constans} \cdot e^{2k\pi i x}. \quad (19)$$

A $(1')$ homogén integrálegyenletnek nincs más λ érték mellett zérustól különböző megoldása. Tegyük föl ugyanis, hogy $\varphi(x)$ megoldása a

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 K(\xi - x) \varphi(\xi) d\xi = 0$$

egyenletnek és $D(\lambda) \neq 0$. Szorozzuk az (ez esetben fönálló) (18) relációt $\varphi(x)$ -el s integráljuk 0-tól 1-ig. Ily módon nyerjük, hogy

$$\int_0^1 K(\xi - x) \varphi(\xi) d\xi = 0, \quad \text{azaz} \quad \varphi(x) \equiv 0.$$

Az eddigiek alapján tehát kimondhatjuk a következő.

I. Tételt: Az (1') homogén integrálegyenletnek azon s csak azon λ parameter értékek mellett van zérustól különböző megoldása, melyek gyökei a (14) alatti $D(\lambda)$ transcendens egész függvénynek. Ezen parameter értékek, az úgynevezett sajátértékek:

$$\lambda_k = \frac{1}{c_k} = \frac{1}{\int_0^1 K(\tau) e^{2k\pi i \tau} d\tau}; \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (19)$$

s a megfelelő megoldó függvények, a sajátfüggvények:

$$\varphi_k(x) = \text{constans. } e^{2k\pi i x}. \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (20)$$

Ez közvetlen általánosítása annak a tételnek, melyet

$$K(\xi - x) = K(x - \xi),$$

azaz symmetrikus mag esetén I. SCHUR ismert föl először.

Tegyük föl mármost, hogy $D(\lambda) \neq 0$, azaz λ nem egyenlő a

$$\lambda_k = \frac{1}{\int_0^1 K(\tau) e^{2k\pi i \tau} d\tau}$$

mennyiségek egyikével sem. Ez esetben az (1) inhomogén integrálegyenletnek van megoldása, melyet a (13)-ból határátmenettel nyert következő kifejezést ad:

$$\varphi(x) = \lim_{\substack{n=0 \\ \frac{p}{n} = x}} \varphi\left(\frac{p}{n}\right) = f(x) + \lambda \int_0^1 K(\xi - x; \lambda) f(\xi) d\xi \quad (21)$$

hol

$$K(\xi - x; \lambda) = \frac{D(\xi - x; \lambda)}{D(\lambda)} = K(\xi - x) + \lambda \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{c_k^2 e^{2k\pi i (x-\xi)}}{1 - \lambda c_k} \quad (22)$$

a $K(\xi - x)$ maghoz tartozó «resolvens mag». Az inhomogén integrálegyenletnek továbbá más megoldása nincs, mert ellenkező esetben a homogén integrálegyenletnek volna zérustól

különböző megoldása oly λ érték mellett, melyre $D(\lambda) \neq 0$, aminek lehetetlenségét az előzőekben mutattuk ki. Az inhomogén integrálegyenletre tehát fennáll a következő:

II. Tétel: Az (1) inhomogén integrálegyenletnek minden oly λ parameterérték mellett, melyre $D(\lambda) \neq 0$, van egy s csak egy megoldása s ezt a (22) alatti resolvens mag segítségével a (21) formula szolgáltatja.

Ha még $\varphi(x)$ kifejezésében a resolvens mag (22) alatti sorát helyettesítjük, úgy a

$$G_k = \int_0^1 f(\tau) e^{-2k\pi i \tau} d\tau$$

rövidítést bevezetve:

$$\begin{aligned} \varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 \left\{ K(\xi - x) + \lambda \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{c_k^2 e^{2k\pi i (x-\xi)}}{1 - \lambda c_k} \right\} f(\xi) d\xi = \\ f(x) + \lambda \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{c_k G_k e^{2k\pi i x}}{1 - \lambda c_k}. \end{aligned} \quad (23)$$

Eddig egyáltalán nem tételeztünk föl a $K(\tau)$, $f(\tau)$ függvények FOURIER-sorainak konvergentiájáról semmit. Ha ezek a $0 \leq \tau \leq 1$ intervallumban egyenletesen konvergensek, úgy az előbbi kifejtések még a következő alakra hozhatók:

$$\begin{aligned} \varphi(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{C_k e^{2k\pi i x}}{1 - \lambda c_k} = \frac{A_0}{1 - \lambda a_0} + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n (1 - \lambda a_n) + B_n \lambda b_n}{(1 - \lambda a_n)^2 + (\lambda b_n)^2} \cos 2n\pi x + \\ + \frac{-A_n \lambda b_n + B_n (1 - \lambda a_n)}{(1 - \lambda a_n)^2 + (\lambda b_n)^2} \sin 2n\pi x. \end{aligned} \quad (21')$$

$$K(\xi - x; \lambda) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2k\pi i (x-\xi)}}{c_k - \lambda} = \frac{a_0}{1 - \lambda a_0} +$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + \lambda(a_n^2 + b_n^2)}{(1 - \lambda a_n)^2 + (\lambda b_n)^2} \cos 2n\pi(x - \xi) + \\
 & + \frac{b_n}{(1 - \lambda a_n)^2 + (\lambda b_n)^2} \sin 2n\pi(x - \xi),
 \end{aligned} \tag{22'}$$

hol

$$c_k = a_k + ib_k = \int_0^1 K(\tau) e^{2\pi k i \tau} d\tau$$

ismét $K(\tau)$ FOURIER-együtthatóit jelentik s $C_k = A_k - iB_k$ az $f(\tau)$ -ra vonatkozólag hasonló jelentéssel bírnak.

3. §. A nyert megoldás discussiója.

Sorfejtési tételek.

A

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 K(\xi - x) \varphi(\xi) d\xi = \begin{cases} f(x) \\ 0 \end{cases} \tag{1}(1')$$

typusu integrálegyenleteknek a mag FOURIER együtthatóival való kapcsolata képessé tesz bennünket egyfelől, hogy a magból közvetlenül az integrálegyenlet sajátértékei s megoldó függvényeire vonjunk következtetéseket, másrészt, hogy előirt tulajdonságokkal bíró integrálegyenleteket szerkeszthessünk.

Mindenekelőtt világos, hogy a sajátértékek száma akkor s csak akkor véges, ha a mag csupán véges számú zérustól különböző FOURIER együtthatóval bír, azaz trigonometrikus polynom. Ha a mag FOURIER együtthatói mind különbözők, úgy a (14) alatti $D(\lambda)$ transcendens egészfüggvény csupán egyszeres zérushelyekkel bír. Ha ellenben a FOURIER együtthatók közt

$$c_{k_1} = c_{k_2} = \dots = c_{k_r} = \gamma,$$

hol r mindig véges, úgy $\frac{1}{\gamma}$ r -szeres sajátérték s a k_1, k_2, \dots, k_r indexű sajátfüggvények minden homogén, lineár összetétele ismét sajátfüggvény, azaz valamely (1) alakú integrálegyenlet

sajátfüggvényei a legáltalánosabb esetben complex együtthatós trigonometrikus polynomok.

Pl. a

$$K(\xi-x) = \frac{\sin(2n+1)\pi(\xi-x)}{2\sin\pi(\xi-x)}$$

mag esetén

$$D(\lambda) = (1-\lambda)^{2n+1},$$

vagyis minden legfőbb n -ed fokú trigonometrikus polynom megoldása a

$$\varphi(x) - \int_0^1 \frac{\sin(2n+1)\pi(\xi-x)}{2\sin\pi(\xi-x)} \varphi(\xi) d\xi = 0$$

integrálegyenletnek.

Általában symmetrikus mag, azaz $K(\tau) = K(-\tau)$ esetén minden k -ra

$$c_k = c_{-k} = \int_0^1 K(\tau) \cos 2k\pi\tau d\tau,$$

vagyis a sajátértékek mind reálisak, $D(\lambda)$ kétszeres gyökei s a sajátfüggvények

$$\mu_k \cos 2k\pi x + \nu_k \sin 2k\pi x,$$

hol μ_k, ν_k tetszőleges állandók. Symmetrikus mag esetén továbbá egyszerűen eldönthetjük a mag FOURIER együtthatói segítségével annak zárt v. definit voltát.

Zártnak mondunk tudvalevőleg egy $K(\xi-x)$ symmetrikus magot akkor, ha a

$$\int_0^1 K(\xi-x) g(\xi) d\xi = 0$$

reláció nem állhat fenn x -ben identikusan semminemű zérustól különböző folytonos függvény esetén sem. Világos, hogy a mag akkor s csak akkor zárt, ha a c_k mennyiségek egyike sem zérus.

Definit s pozitív definit a mag akkor, ha minden négyzetével együtt integrabilis $g(x)$ függvényre:

$$I(g) = \int_0^1 \int_0^1 K(\xi - x) g(x) g(\xi) dx d\xi \geq 0.$$

Minthogy

$$I(g) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \int_0^1 g(\tau) e^{2k\pi i \tau} d\tau \int_0^1 g(\tau) e^{-2k\pi i \tau} d\tau,$$

tehát a mag pozitív, definit voltának szükséges és elegendő feltétele, hogy a c_k mennyiségek egyike se legyen negatív.

Az (1) alakú integrálegyenletek resolvens magjára (22)-ből következik, hogy mindenkor egyszeres polusai vannak. E resolvens magok a legegyszerűbb típusúak közé tartoznak, amennyiben az egyes pólusaikhoz tartozó főrészek csupán 1 exponensű elemi osztókkal bírnak. (L. T. LALESKO: Théorie des équ. intégrales, 44—58. o.)

★

Hogy az általános HILBERT-SCHMIDT-féle sorfejtési tételeket a jelen esetre alkalmazhassuk, előbb az adjungált sajátfüggvénypárokat kell bevezetnünk. Egy nem szimmetrikus mag adjungált sajátfüggvényei alatt értjük E. SCHMIDT szerint azon $\varphi(x)$, $\psi(x)$ függvénypárokat, melyek,

$$\begin{aligned} \varphi(x) - \lambda \int_0^1 K(\xi - x) \psi(\xi) d\xi &= 0, \\ \psi(x) - \lambda \int_0^1 K(x - \xi) \varphi(\xi) d\xi &= 0 \end{aligned} \tag{24}$$

integrálegyenleteket elégítik ki. Ez esetben, mint az igen egyszerű számítással igazolható, a $\varphi(x)$ és $\psi(x)$ függvények egyazon, szimmetrikus maggal bíró homogén integrálegyenletet elégítenek ki, ugyanis

$$\chi(x) - \lambda^2 \int_0^1 K^*|\xi - x| \chi(\xi) d\xi = 0 \quad (25)$$

$$\begin{aligned} K^*|\xi - x| &= \int_0^1 K(\xi - \tau) K(\tau - x) d\tau = \int_0^1 K(x - \tau) K(\tau - \xi) d\tau = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k c_{-k} e^{2k\pi i(\xi - x)} = a_0^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \cos 2n\pi(\xi - x), \end{aligned} \quad (26)$$

hol a_k , b_k , c_k a korábbi jelentéssel bírnak s tehát a $K^*|\xi - x$ «komponált» mag kifejtése absolute és egyenletesen konvergens. Eszerint a szimmetrikus magról mondottakat figyelembe véve, nyerjük, hogy a (25) integrálegyenlet sajátértékei:

$$\lambda_k^2 = \lambda_{-k}^2 = \frac{1}{c_k c_{-k}} = \frac{1}{a_k^2 + b_k^2}$$

s a $\lambda_k^2 = \lambda_{-k}^2$ sajátértékhez tartozó sajátfüggvény

$$\chi_k(x) = \mu_k \cos 2k\pi x + \nu_k \sin 2k\pi x.$$

Hogy a (24) egyenletekhez tartozó adjungált sajátfüggvényt párokat nyerjük, még a μ_k , ν_k állandókat kell alkalmas módon meghatároznunk. Ily módon rövid számítással a $\varphi_k(x)$ és $\psi_k(x)$ -ekre a következő kifejezéseket nyerjük:

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) &= 1; \varphi_k(x) = \cos(2k\pi x - \delta_k); \varphi_{-k}(x) = \sin(2k\pi x - \delta_k) \\ \psi_0(x) &= 1; \psi_k(x) = \cos(2k\pi x - \varepsilon_k); \psi_{-k}(x) = \sin(2k\pi x - \varepsilon_k), \end{aligned} \quad (27)$$

hol δ_k és ε_k a

$$\operatorname{tg}(\delta_k - \varepsilon_k) = \frac{b_k}{a_k}$$

reláció által függnek össze, különben tetszőlegesek.

Ezek után, amennyiben az (1) integrálegyenletre vonatkozó eddigi eredményeinkhez az algebraiból való határátmenettel jutottunk, azokra az általános HILBERT-SCHMIDT-féle sorfejtési tételt alkalmazhatjuk s azt a következő alakban mondhatjuk ki:

III. Tétel: Minden a $(0, 1)$ intervallumban definiált folytonos $f(x)$ függvény, mely

$$f(x) = \int_0^1 K(\xi - x) g(\xi) d\xi; \quad f(x) = \int_0^1 K(x - \xi) h(\xi) d\xi \quad (28)$$

alakok valamelyikében előállítható, hol $K(\tau)$, $h(\tau)$, $g(\tau)$ négyzetükkel együtt integrabilis függvényeket jelentenek, a $(0, 1)$ intervallumban absolute és egyenletesen kongergens, a $\varphi_k(x)$, ill. $\phi_k(x)$ -ek szerint haladó, tehát mindkét esetben FOURIER-sorba fejthető.

E tétel, bár még mindig kevesebbet mond, mint a HEINE-féle konvergentia tétel, magában foglalja HILBERT-nek az első közleményében adott tételét, mely a kifejtendő $f(x)$ -től kétszer folytonosan differenciálhatóságot kíván.

4. §. Singuláris integrálegyenletek.

Valamely integrálegyenletet singulárisnak mondunk akkor, ha a mag az integráció intervallum legalább egy pontjában végtelenné válik, vagy ha a benne előforduló határozott integrálnak legalább egyik határa végtelen.

Az első kategóriába tartozó singuláris integrálegyenletek közül csupán azokkal foglalkozunk, melyeknél a $K(\tau)$ mag függvény a $(0, 1)$ intervallumnak csupán egy pontjában válik végtelenné, melyet ekkor az általánosság megszorítása nélkül a 0 pontba tehetünk. Tehát a mag követhető alakú:

$$K(\xi - x) = \frac{G(\xi - x)}{(\xi - x)^\alpha}, \quad (0 < \alpha < 1) \quad (29)$$

hol $G(\xi - x)$ a $\xi = x$ helyen zérustól különböző, véges s a singuláris maghoz tartozó α *exponens* nyilván kell, hogy a 0 és 1 határok között legyen, az (1)-ben szereplő integrál konvergentiájának biztosítására.

Ha $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, úgy a mag négyzetével együtt integrabilis, tehát a $D(\lambda)$ transcendens egész függvény (14') alatti módosí-

tott alakja, valamint a többi kifejezések ez esetben is konvergensek, tehát az integrálegyenlet a közönséges módon oldható.

Ha azonban $\frac{1}{2} \leq \alpha < 1$, úgy a $K(\xi - x)$ mag iteráltjaihoz kell fordulnunk, melyek a

$$K_p(\xi - x) = \int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 K(\xi - \tau_1) K(\tau_1 - \tau_2) \cdots K(\tau_p - x) d\tau_1 d\tau_2 \cdots d\tau_p \quad (30)$$

($p=1, 2, \dots$)

formulák által definiáltak s melyek legegyszerűbben (22')-ből az ismert

$$K_p(\xi - x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k^{p+1} e^{2k\pi i (x-\xi)}$$

alakban nyerhetők. Tudvalevőleg, ha $K(\xi - x)$ exponense α , úgy a $\left[\frac{\alpha}{1-\alpha}\right] + 1$ -ik iterált már véges,¹ s sajátfüggvényei azonosak a $K(\xi - x)$ -hez tartozókkal, míg sajátértékei a $K(\xi - x)$ -hez tartozóknak $\left[\frac{\alpha}{1-\alpha}\right] + 1$ -ik hatványai. Tehát az eredeti integrálegyenlet megoldása vissza van vezetve egy reguláris maggal bíró egyenletére.

A második kategóriába tartozó singuláris integrálegyenletek közül a

$$\varphi(x) - \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} K(\xi - x) \varphi(\xi) d\xi = \begin{cases} 0 \\ f(x) \end{cases} \quad (31)$$

alakúakkal akarunk foglalkozni. Ismeretes, hogy ily típusú singuláris integrálegyenletek sajátértékei általában nem izoláltak, mint a reguláris esetben, hanem intervallumokat mindenütt sűrűn tölthetnek be, s ekkor a mag ú. n. folytonos spektrumát alkotják. Továbbá, amint a reguláris integrálegyenletek függvények sorfejtéseivel vannak kapcsolatban, úgy a singulárisak függvényeknek határozott integrálokkal való előállításával.

¹ [β] a β -ban foglalt legnagyobb egészszám. L. T. LALESKO : Théorie, 113. o.

Mindezen analitikai jelenségek létrejötteinek előtűntetésére igen alkalmas a (31) alatti integrálegyenlet típus, melynek megoldását a következőkben előbbi formuláinkból, határátmenettel állítjuk elő.

Ugyanis, tekintetbe véve a (31)-ben előforduló improprius integrál szokásos definitióját, közelfekvő az a gondolat, hogy először a

$$\varphi(x) - \lambda \int_{-m\pi}^{+m\pi} K^{(m)}(\xi - x) \varphi(\xi) d\xi = f(x) \quad (32)$$

reguláris integrálegyenletet oldjuk meg, melynek $K^{(m)}(\tau)$ magja a $(-m\pi, +m\pi)$ intervallumban megegyezik az adott $K(\tau)$ -val s azonkívül periodikusan folytatódik, azután m -et minden határon túl növelve, a nyert határfüggvényekről kimutatjuk, hogy azok megoldásai a (31) singuláris integrálegyenletnek.

Hogy ezen utólagos verifikáció minden nehézség nélkül történhessék, tegyük föl, hogy $K(\tau)$ a $(-\infty, +\infty)$ intervallumban definiált reális, absolute integrabilis és véges variációjú függvény. Továbbá oldjuk meg a (32) integrálegyenletet a korábbi formuláink segítségével. Ekkor, tekintetbe véve a $(-m\pi, +m\pi)$ intervallumnak megfelelő csekély változtatásokat, a következő eredményekhez jutunk. A $K^{(m)}(\tau)$ maghoz tartozó $D^{(m)}(\lambda)$ transzcendens

$$D^{(m)}(\lambda) = \prod_{k=-\infty}^{+\infty} \left\{ 1 - \lambda \int_{-m\pi}^{+m\pi} K(\tau) e^{\frac{k}{m} i\tau} d\tau \right\}, \quad (33)$$

tehát a sajátértékek és sajátfüggvények (19, 20) alapján:

$$\lambda_k^{(m)} = \frac{1}{\int_{-m\pi}^{+m\pi} K(\tau) e^{\frac{k}{m} i\tau} d\tau}; \quad \varphi_k^{(m)}(x) = e^{\frac{k}{m} ix} \quad (34)$$

$\lambda_k^{(m)}$ ezen kifejezése közvetlenül mutatja, hogy a $K(\tau)$ magra tett kikötések esetén a sajátértékek m növekedtével sűrűsödnek.

A $K^{(m)}(\tau)$ -hoz tartozó resolvens mag (22) szerint (figyelembe véve a c_k -k jelentését):

$$K^{(m)}(\xi - x; \lambda) =$$

$$= K^{(m)}(\xi - x) + \frac{\lambda}{2m\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\left[\int_{-m\pi}^{+m\pi} K(\tau) e^{\frac{k}{m} i\tau} d\tau \right]^2}{1 - \lambda \int_{-m\pi}^{+m\pi} K(\tau) e^{\frac{k}{m} i\tau} d\tau} e^{\frac{k}{m} i(x-\xi)}, \quad (35)$$

mely minden oly λ értékre, mely a (34) sajátértékek egyikével sem egyenlő, kielégíti a (18) alatti

$$K^{(m)}(\xi - x; \lambda) - K^{(m)}(\xi - x) = \lambda \int_{-m\pi}^{+m\pi} K^{(m)}(\tau - x) K^{(m)}(\xi - \tau; \lambda) d\tau \quad (36)$$

fundamentális relatiót.

Konvergáltassuk most m -et a pozitív egész számok során át a végtelenhez. A $D^{(m)}(\lambda)$ transcendens ekkor semminő határfüggvényhez nem konvergál, azaz a singuláris esetben $D^{(m)}(\lambda)$ -nak ily értelemben analogonja nem létezik. Ellenben a $\lambda_k^{(m)}$ sajátértékek halmaza $m = \infty$ -re egy perfekt pontthalmazhoz konvergál, melynek a k index helyébe most belépő σ folytonos parameter segítségével való kifejezése:

$$\lim_{\substack{m=\infty \\ \frac{k}{m}=\sigma}} \lambda_k^{(m)} = \lambda(\sigma) = \frac{1}{\int_{-\infty}^{+\infty} K(\tau) e^{i\sigma\tau} d\tau}. \quad (-\infty \leq \sigma \leq +\infty) \quad (37)$$

E pontthalmaz tehát általában a komplex sík egy, vagy több görbéjét, symmetrikus mag esetében a reális tengely egy vagy több intervallumát tölti be.

$\varphi_k^{(m)}(x)$ határfüggvénye $m = \infty$ -re nyilván a következő:

$$\lim_{\substack{m=\infty \\ \frac{k}{m}=\sigma}} \varphi_k^{(m)}(x) = \varphi(\sigma; x) = e^{i\sigma x}. \quad (37')$$

Végül a (35) alatti $K^{(m)}(\xi - x; \lambda)$ resolvens mag határfüggvénye:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} K^{(n)}(\xi - x; \lambda) = K(\xi - x; \lambda) =$$

$$= K(\xi - x) + \frac{\lambda}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left[\int_{-\infty}^{+\infty} K(\tau) e^{i\sigma\tau} d\tau \right]^2}{1 - \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} K(\tau) e^{i\sigma\tau} d\tau} e^{i\sigma(\xi - x)} d\sigma, \quad (38)$$

melyben a σ szerinti integrál minden oly λ érték mellett, mely nem tartozik a (37) által definiált halmazhoz, absolute és $\xi - x$ -re vonatkozólag egyenletesen konvergens, mint az a

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} K(\tau) e^{i\sigma\tau} d\tau \right| < \frac{\text{constans}}{|\sigma|}, \quad (-\infty \leq \sigma \leq +\infty)$$

egyenlőtlenségből, mely minden integrabilis, véges variációjú $K(\tau)$ -ra érvényes, közvetlenül belátható.

Annak a verifikálása czéljából,¹ hogy e határfüggvény kielégíti a (36)-nak megfelelő fundamentális relatiót, szorozzuk $K(\xi - x; \lambda)$ (38) kifejezését (miután abban x helyébe τ -t írunk) $K(\tau - x)$ -el s integráljunk $-\infty, +\infty$ határok között. A

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K(\tau) e^{i\sigma\tau} d\tau = \chi(\sigma)$$

futólagos rövidítést használva:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K(\tau - x) K(\xi - \tau; \lambda) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} K(\tau - x) K(\xi - \tau) d\tau +$$

$$+ \frac{\lambda}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} K(\tau - x) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{[\chi(\sigma)]^2}{1 - \lambda\chi(\sigma)} e^{i\sigma(\xi - \tau)} d\sigma d\tau.$$

A jobboldali első integrál, mint $\xi - x$ -nek absolute integrabilis, folytonos, véges variációjú függvénye, az egész $(-\infty, +\infty)$ intervallumban a következő FOURIER-integrállal állítható elő:²

¹ Hasonló módon verifikálta e relatiónak egy később tárgyalandó speciális esetét G. HERGLOTZ (l. Math. Ann. Bd. 65. pp. 88—90.).

² L. JORDAN: Cours d'Analyse.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\sigma \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\sigma[\alpha-(\xi-x)]} \int_{-\infty}^{+\infty} K(\tau) K(a-\tau) d\tau da = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [\chi(\sigma)]^2 e^{i\sigma(x-\xi)} d\sigma. \end{aligned}$$

Másrészt a jobboldali második integrálban a magra vonatkozó föltevéseink mellett a σ és τ szerinti integrációk sorrendjét fölcserélhetjük s ekkor a

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{[\chi(\sigma)]^2}{1-\lambda\chi(\sigma)} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} K(\tau-x) e^{i\sigma(\tau-x)} d\tau \right\} e^{i\sigma(x-\xi)} d\sigma = \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{[\chi(\sigma)]^3}{1-\lambda\chi(\sigma)} e^{i\sigma(x-\xi)} d\sigma \end{aligned}$$

eredményhez jutunk. E két utolsó reláció összefoglalásával s (38) tekintetbe vételével nyerjük, hogy

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} K(\tau-x) K(\xi-\tau; \lambda) d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [\chi(\sigma)]^2 e^{i\sigma(x-\xi)} d\sigma + \\ + \frac{\lambda}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{[\chi(\sigma)]^3}{1-\lambda\chi(\sigma)} e^{i\sigma(x-\xi)} d\sigma = K(\xi-x; \lambda) - K(\xi-x), \end{aligned}$$

azaz $K(\xi-x; \lambda)$ valóban kielégíti a

$$K(\xi-x; \lambda) - K(\xi-x) = \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} K(\tau-x) K(\xi-\tau; \lambda) d\tau \quad (39)$$

fundamentális relációt minden oly λ -ra, mely nem tartozik a (37) halmazhoz.

Ezen előkészületek után a (31) singuláris integrálegyenlet megoldását a következőképen végezhetjük. Legyen először λ egyenlő a (37) alatti $\lambda(\sigma)$ értékek valamelyikével. Ekkor közvetlenül belátható, hogy $e^{i\sigma x}$ egy, az egész $(-\infty, +\infty)$ inter-

vallumban véges megoldása a homogén integrálegyenletnek. Ha ellenben λ nem egyenlő a $\lambda(\sigma)$ értékek egyikével sem, úgy a reguláris egyenletnél végzett, korábbi meggondolás ez esetben csak akkor alkalmazható, ha az itt föllépő improprius integrálok konvergentiája biztosítva van. Ez abban az esetben, ha az összes tekintetbe jövő függvények végesek, bekövetkezik, ha fölteszük, hogy a $K(\tau)$ magon kívül még a $K(\tau; \lambda)$ «resolvens mag» is abszolút integrabilis a $(-\infty, +\infty)$ intervallumban. Ekkor szószerint ugyanazon meggondolásokkal, melyeket a reguláris esetben végeztünk, a következő tételekhez jutunk:

IV., V. Tétel: Ha a (31) singuláris integrálegyenletnek magja, valamint (38) szerint képzett resolvens magja a $(-\infty, +\infty)$ intervallumban abszolút integrabilisek, úgy 1. a homogén egyenletnek akkor s csak akkor van zérustól különböző, mindenütt véges megoldása, ha a tekintetbe vett λ parameterérték a

$$\lambda(\sigma) = \frac{1}{\int_{-\infty}^{+\infty} K(\tau) e^{i\sigma\tau} d\tau}; \quad (-\infty \leq \sigma \leq +\infty)$$

halmazhoz, az integrálegyenlet «spektrumához» tartozik, s ekkor a $\lambda(\sigma)$ sajátértékhez tartozó sajátfüggvény:

$$\varphi(x; \sigma) = e^{i\sigma x},$$

2. az inhomogén integrálegyenletnek minden oly λ parameterérték mellett, mely nem tartozik a spektrumhoz, van egy s csak egy mindenütt véges megoldása s ezt a (38) resolvens mag segítségével a

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} K(\xi - x; \lambda) f(\xi) d\xi$$

formula szolgáltatja, hol $f(x)$ az integrálegyenlet jobboldalán álló, adott, integrálható s a $(-\infty, +\infty)$ intervallumban véges függvény.

5. §. Általánosítások.

Az eddigi összes eredmények levezetésénél lényeges volt azon föltevés, hogy az integrálegyenlet magja, $K(\xi-x)$, a benne előforduló változók különbségétől függ s ezen különbségnek periodikus függvénye.

A következőkben néhány oly integrálegyenlet megoldását adjuk, melyek a megelőzők általánosításául tekinthetők.

Első ily eset az, midőn a mag ismét a változók különbségétől függ, azonban nem periodikus, hanem a

$$K(\tau+1) = \theta \cdot K(\tau)$$

relatiónak tesz eleget, hol θ tetszésszerű reális vagy complex állandó.

Az ezen maghoz tartozó (4) alatti $D_n(l)$ determináns:

$$D_n(l) = \begin{vmatrix} 1-lK_0, & -lK_1, & -lK_2, & \dots & -lK_{n-1} \\ -l\theta K_{n-1}, & 1-lK_0, & -lK_1, & \dots & -lK_{n-2} \\ -l\theta K_{n-2}, & -l\theta K_{n-1}, & 1-lK_0, & \dots & -lK_{n-3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ -l\theta K_1, & -l\theta K_2, & -l\theta K_3, & \dots & 1-lK_0 \end{vmatrix} \quad (4^*)$$

nem cyklikus ugyan, azonban reá nézve a cyklikus determinánsokéhoz hasonló felbontás áll fönn, ugyanis ¹

$$D_n(l) = \prod_{k=0}^{n-1} \{1-l[K_0 + K_1\vartheta_k + K_2\vartheta_k^2 + \dots + K_{n-1}\vartheta_k^{n-1}]\}$$

hol $\vartheta_0, \vartheta_1, \dots, \vartheta_{n-1}$ a

$$\vartheta^n - \theta = 0$$

egyenlet gyökeit jelentik.¹ Tehát a 2. §-ban levezetett megoldási formulák ezen esetre is kiterjeszthetők, ha bennük a

¹ Tudomásom szerint a szóbanforgó determináns ezen fölbontása az irodalomban nem ismeretes. Levezetése hasonló módon történhetik, mint a cyklikus determinánsoknál, ugyanis (4*) komponálendő a $\vartheta^n - \theta = 0$ egyenlet gyökeinek Vandermond-féle determinánsával.

megfelelő változtatásokat végezzük. Ekkor $D(\lambda)$ és $D(\xi - x; \lambda)$ számára a következő kifejezéseket nyerjük:

$$D(\lambda) = \prod_{k=-\infty}^{+\infty} \left\{ 1 - \lambda \int_0^1 K(\tau) e^{(2k\pi + \alpha)i\tau} d\tau \right\}; (e^{i\alpha} = \theta) \quad (14^*)$$

$$D(\xi - x; \lambda) = D(\lambda) K(\xi - x) - \lambda D(\lambda) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\gamma_k^2 e^{(2k\pi + \alpha)i(\xi - x)}}{1 - \lambda \gamma_k} \quad (16^*)$$

hol $\gamma_k = \int_0^1 K(\tau) e^{(2k\pi + \alpha)i\tau} d\tau$. A többi megoldási formulák ezekből közvetlenül nyerhetők.

Ha az integrálegyenlet magja a változók összegétől függ, azaz $K(\xi + x)$ alakú, úgy a fenti eljárás nem vezet megoldáshoz, mivel a megfelelő $D_n(l)$ determináns nem bontható tényezőire. Azonban, ha — vezetettvén a hasonló maggal bíró (1) integrálegyenlet s a FOURIER-sor közti kapcsolat által — a megoldás, valamint az adott függvények FOURIER-sorba fejthetőségét föltételezzük, úgy a megoldás FOURIER-sora együtt hatóit meghatározhatjuk.

Legyen adva tehát, a jelzettnél valamivel általánosabb alakú

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^{\omega} K(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi = \begin{cases} 0 \\ f(x) \end{cases}; \quad (40, 40')$$

$$K(x, \xi) = K(\xi + x) + K'(\xi - x)$$

integrálegyenlet s a benne szereplő függvényekről tegyük föl, hogy ω szerint periodikusak, négyzeteikkel együtt integrálhatók s a DIRICHLET-féle föltételnek eleget tesznek, következésképpen FOURIER-soraik:

$$\begin{aligned} K(\tau) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{\frac{2n\pi i}{\omega} \tau}; \quad c_n = \frac{1}{\omega} \int_0^{\omega} K(\tau) e^{-\frac{2n\pi i}{\omega} \tau} d\tau = \frac{a_n - ib_n}{2} \\ K'(\tau) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c'_n e^{\frac{2n\pi i}{\omega} \tau}; \quad c'_n = \frac{1}{\omega} \int_0^{\omega} K'(\tau) e^{-\frac{2n\pi i}{\omega} \tau} d\tau = \frac{a'_n - ib'_n}{2} \quad (41) \\ f(\tau) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{\frac{2n\pi i}{\omega} \tau}; \quad C_n = \frac{1}{\omega} \int_0^{\omega} f(\tau) e^{-\frac{2n\pi i}{\omega} \tau} d\tau = \frac{A_n - iB_n}{2} \end{aligned}$$

hol a_n , b_n stb. a szokott értelemben vett FOURIER együtt-hatókat jelentik, a $(0, \omega)$ intervallumban, végezzámú részinter-vallum kivételével, melyeknek összege tetszőleges kicsinnyé-tehető, egyenletesen konvergensek.

Legyen továbbá a $\varphi(x)$ megoldás feltételezett FOURIER sora:

$$\varphi(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \gamma_n e^{\frac{2n\pi i}{\omega} \tau}; \quad \gamma_n = \frac{1}{\omega} \int_0^\omega \varphi(\tau) e^{-\frac{2n\pi i}{\omega} \tau} d\tau = \frac{a_n - i\beta_n}{2}. \quad (42)$$

Ha ezen sorokat a (40) integrálegyenletbe helyettesítjük, úgy a PARSEVAL formula alkalmazásával s CANTOR tételét figye-lembe véve az a és β -k meghatározására a következő egyen-leteket nyerjük:

$$\begin{aligned} a_0 - \frac{\omega\lambda}{2} a_0 (a_0 + a'_0) &= 0, \text{ illetve } = A_0 \\ a_n - \frac{\omega\lambda}{2} [a_n (a_n + a'_n) + \beta_n (b_n + b'_n)] &= 0, \quad \text{„} = A_n \quad (43) \\ \beta_n - \frac{\omega\lambda}{2} [a_n (b_n - b'_n) + \beta_n (-a_n + a'_n)] &= 0, \quad \text{„} = B_n \end{aligned} \quad (n=1, 2, \dots)$$

Ezek szerint annak, hogy a homogén integrálegyenletnek zérustól különböző megoldása legyen, szükséges és elegendő föltétele, hogy a tekintetbe vett λ parameterérték mellett az

$$1 - \frac{\omega\lambda}{2} (a_0 + a'_0); \quad 1 - \omega\lambda a'_n + \frac{\omega^2\lambda^2}{4} (a_n'^2 + b_n'^2 - a_n^2 - b_n^2); \quad (n=1, 2, \dots)$$

mennyiségeknek legalább egyike eltűnjék. A sajátértékek tehát

$$\lambda_0 = \frac{2}{\omega (a_0 + a'_0)}; \quad \lambda_{\pm n} = 2 \frac{a'_n \pm \sqrt{-b_n'^2 + a_n'^2 + b_n^2}}{\omega [a_n'^2 + b_n'^2 - a_n^2 - b_n^2]} \quad (44)$$

s a sajátfüggvények:

$$\varphi_0(x) = 1; \quad \varphi_n(x) = \mu_n \cos \frac{2n\pi}{\omega} x + \nu_n \sin \frac{2n\pi}{\omega} x; \quad (n=\pm 1, \pm 2, \dots) \quad (45)$$

hol μ_n , ν_n a (43. 44) egyenletek alapján határozandók meg s általában komplexek.

Ha λ nem egyenlő a (44) sajátértékek egyikével sem, úgy a (43)

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{A_0}{1 - \lambda \frac{\omega(a_0 + a'_0)}{2}}; \\ \alpha_n &= \frac{A_n \left[1 - \lambda \frac{\omega(-a_n + a'_n)}{2} \right] + B_n \lambda \frac{\omega(b_n + b'_n)}{2}}{1 - \lambda \omega a'_n - \lambda^2 \frac{\omega^2(a_n^2 + b_n^2 - a_n'^2 - b_n'^2)}{4}}; \\ \beta_n &= \frac{A_n \lambda \frac{\omega(b_n - b'_n)}{2} + B_n \left[1 - \lambda \frac{\omega(a_n + a'_n)}{2} \right]}{1 - \lambda \omega a'_n - \lambda^2 \frac{\omega^2(a_n^2 + b_n^2 - a_n'^2 - b_n'^2)}{4}}; \end{aligned} \quad (46)$$

mennyiségek szolgáltatják a (39) inhomogén integrálegyenlet megoldásának FOURIER együtthatóit. Az adott függvényekre vonatkozó föltevésekből következik, hogy $\Sigma(\alpha_n^2 + \beta_n^2)$ konvergens, tehát a RIESZ-FISCHER-féle tétel szerint van egy s csak egy négyzetével együtt integrabilis függvény, melynek FOURIER együtthatói az α_n, β_n mennyiségek.

A $K(x, \xi)$ maghoz tartozó $K(x, \xi; \lambda)$ resolvens mag kiszámítása legegyszerűbben az ismert

$$K(x, \xi; \lambda) - K(x, \xi) = \lambda \int_0^{\omega} K(x, \tau; \lambda) K(\tau, \xi) d\tau = 0 \quad (47)$$

reláció alapján történhetik, azonban az általános esetben a formulák oly bonyolultak, hogy azok kiírását itt mellőzzük.

Ha a $K(x, \xi) = K(\xi + x) + K'(\xi - x)$ magban $K(\tau) \equiv 0$, úgy a korábban vizsgált integrálegyenlethez jutunk vissza. A $K'(\tau) \equiv 0$, azaz a

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^{\omega} K(\xi + x) \varphi(\xi) d\xi = \begin{cases} 0 \\ f(x) \end{cases} \quad (48)$$

esetben a sajátértékek és sajátfüggvények:

$$\begin{aligned}\lambda_0 &= \frac{2}{\omega a_0}; \lambda_{\pm n} = \pm \frac{2}{\omega \sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \\ \varphi_0(x) &= 1; \varphi_{\pm n}(x) = \cos\left(\frac{2n\pi}{\omega}x \pm \frac{1}{2} \arctg \frac{b_n}{a_n}\right).\end{aligned}\quad (49)$$

A $K(\xi+x)$ mag resolvens magjára vonatkozólag a fent jelzett számítás a következő kifejezést adja:

$$\begin{aligned}K(x, \xi; \lambda) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{1 - \lambda^2 \frac{\omega^2 (a_n^2 + b_n^2)}{4}} \cos \frac{2n\pi}{\omega} (\xi+x) + \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{1 - \lambda^2 \frac{\omega^2 (a_n^2 + b_n^2)}{4}} \sin \frac{2n\pi}{\omega} (\xi+x) + \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda \frac{\omega (a_n^2 + b_n^2)}{2}}{1 - \lambda^2 \frac{\omega^2 (a_n^2 + b_n^2)}{4}} \cos \frac{2n\pi}{\omega} (\xi-x).\end{aligned}\quad (50)$$

Egy másik speciális eset, melyet a következőkben alkalmazni fogunk, az, midőn $K(\tau)$, valamint $K'(\tau)$ kifejtései tiszta cosinus-sorok, azaz $b_n = b'_n = 0$ és

$$K(x, \xi) = K|\xi+x| + K'|\xi-x|.$$

Ekkor (44, 45) szerint

$$\begin{aligned}\lambda_0 &= \frac{2}{\omega (a_0 + a'_0)}; \lambda_{\pm n} = \frac{2}{\omega (a'_n \pm a_n)} \\ \varphi_0(x) &= 1; \varphi_n(x) = \cos \frac{2n\pi}{\omega} x; \varphi_{-n}(x) = \sin \frac{2n\pi}{\omega} x,\end{aligned}\quad (51)$$

továbbá a resolvens mag:

$$\begin{aligned}
 K(x, \xi; \lambda) = & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{1 - \lambda \omega a'_n - \lambda^2 \frac{\omega^2 (a_n^2 - a_n'^2)}{4}} \cos \frac{2n\pi}{\omega} (\xi + x) + \\
 & + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a'_n - \lambda \frac{\omega (a_n^2 - a_n'^2)}{2}}{1 - \lambda \omega a'_n - \lambda^2 \frac{\omega^2 (a_n^2 - a_n'^2)}{4}} \cos \frac{2n\pi}{\omega} (\xi - x).
 \end{aligned}
 \quad (52)$$

Ha a (39) egyenletben $f(x)$ helyébe $\lambda f(x)$ -et írunk, s λ -val osztva, az utóbbit minden határon túl növeljük, úgy (39) a

$$\int_0^{\omega} \{K(\xi + x) + K'(\xi - x)\} \varphi(\xi) d\xi = f(x) \quad (53)$$

elsőfajú integrálegyenletbe megy át.

Tehát a (46) megoldási formulákban A_n , B_n helyébe λA_n , λB_n -et téve s aztán λ -t végtelenhez konvergáltatva, az (53) elsőfajú integrálegyenlet megoldásához jutunk mindazon esetekben, midőn ily megoldás létezik.

Az (53) elsőfajú integrálegyenletnek a négyzetükkel együtt integrálabilis függvények tartományában való megoldhatóságának szükséges és elegendő feltétele szimmetrikus mag (azaz $b'_n = 0$) esetén a következő alakban mondható ki:¹

$$\begin{aligned}
 \text{I. } & \int_a^b f(x)^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ \int_a^b f(x) \varphi_n(x) dx \right\}^2 \\
 \text{II. } & \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \lambda_n^2 \left\{ \int_a^b f(x) \varphi_n(x) dx \right\}^2 \text{ konvergens,}
 \end{aligned}
 \quad (54)$$

hol λ_n a maghoz tartozó sajátértékeket s $\varphi_n(x)$ a normált sajátfüggvényeket jelentik.

¹ L. E. PICARD: Sur un théorème général relatif aux équations integrales de première espèce. [Rendiconti del Circolo matematico di Palermo: XXIX. 1910. pp. 79—97.]

Ezen föltételek teljesülése esetén a megoldás FOURIER együtt-
hatói (46) alapján:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2A_0}{\omega(a_0 + a'_0)}; \quad a_n = \frac{2\{A_n(-a_n + a'_n) - B_nb_n\}}{\omega(a_n'^2 - a_n^2 - b_n^2)}; \\ \beta_n &= \frac{2\{A_nb_n - B_n(a_n + a'_n)\}}{\omega(a_n'^2 - a_n^2 - b_n^2)}. \end{aligned} \quad (55)$$

MÁSODIK RÉSZ.

Alkalmazások.

6. §. Fredholm-féle másodfajú integrálegyenletek.

Fenti eredményeink első alkalmazását HILBERT egyik példáján akarjuk bemutatni, melynek megoldásához ő az integrálegyenletek s bizonyos differenciálegyenletek közti kapcsolat alapján jutott. Az integrálegyenlet a következő:

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 K(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi = 0, \quad (1)$$

hol $K(x, \xi)$ a $(0, 1)$ intervallumban következő módon definiált függvény:

$$K(x, \xi) = \begin{cases} (1-\xi)x & \text{ha } x \leq \xi \\ (1-x)\xi & \text{ha } x \geq \xi \end{cases}.$$

Tehát $K(x, \xi)$ nyilván a következő alakban írható:

$$K(x, \xi) = \frac{(\xi-x)^2 - (\xi+x)^2}{4} - \frac{|\xi-x| - (\xi+x)}{2},$$

azaz reá a fent nyert, 5. §-ban általánosított formulák alkalmazhatók. Az ottani jelölések szerint most

$$\begin{aligned} K(\tau) &= -\frac{\tau^2}{4} + \frac{\tau}{2} = \frac{1}{6} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi\tau}{n^2\pi^2} \\ K'(\tau) &= \frac{\tau^2}{4} - \frac{\tau}{2} = -\frac{1}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi\tau}{n^2\pi^2}, \end{aligned}$$

tehát a sajátértékek (51)-ből közvetlenül:

$$\lambda_n = n^2 \pi^2, \quad (n=1, 2, \dots) \quad (2)$$

a 0 és negatív indexű sajátértékek végtelenek. A sajátfüggvények:

$$\varphi_n(x) = \sin n\pi x. \quad (n=1, 2, \dots) \quad (3)$$

Miután $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n}$ konvergens, tehát a $D(\lambda)$ transcendens:

$$D(\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n^2 \pi^2}\right) = \frac{\sin \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}}. \quad (4)$$

A $K(x, \xi; \lambda)$ resolvens mag előállítására (52) szerint:

$$\begin{aligned} K(x, \xi; \lambda) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{n^2 \pi^2}}{1 - \frac{\lambda}{n^2 \pi^2}} \cos n\pi (\xi + x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{n^2 \pi^2}}{1 - \frac{\lambda}{n^2 \pi^2}} \cos n\pi (\xi - x) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos n\pi [1 - (\xi + x)] - (-1)^n \cos n\pi [1 - |\xi - x|]}{n^2 \pi^2 - \lambda} + \quad (5) \\ &= \begin{cases} \frac{\sin \{\sqrt{\lambda} (1 - \xi)\} \sin (\sqrt{\lambda} x)}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}}, & x \leq \xi \\ \frac{\sin \{\sqrt{\lambda} (1 - x)\} \sin (\sqrt{\lambda} \xi)}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}}, & x \geq \xi \end{cases} \end{aligned}$$

Végül a másik FREDHOLM-féle transcendens, $D(x, \xi; \lambda)$ a $K(x, \xi; \lambda)$ és $D(\lambda)$ kifejezések szorzásából adódik. —

Egy másik példa a FREDHOLM-féle egyenletre, melyre a következőkben is szükségünk lesz:

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^{2\pi} \log \left(2 \left| \sin \frac{\xi - x}{2} \right| \right) \varphi(\xi) d\xi = 0. \quad (6)$$

Ez esetben a mag a $\xi - x$ különbség páros, periodikus függ-

¹ Az ismert $\cosh ax = 2a \sinh a \left\{ \frac{1}{2a^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos n\pi x}{a^2 + n^2 \pi^2} \right\}$, $|x| \leq 1$, formula fölhasználásával.

vénye, mely a $\xi = x$ helyen logaritmikusan válik végtelenné, reá tehát a 2. §. eredményei közvetlenül alkalmazhatók. A sajátértékek (51) szerint

$$\lambda_0 = \frac{1}{\int_0^{2\pi} \log \left(2 \left| \sin \frac{\tau}{2} \right| \right) d\tau} = \infty;$$

$$\lambda_k = \lambda_{-k} = \frac{1}{\int_0^{2\pi} \log \left(2 \left| \sin \frac{\tau}{2} \right| \right) \cos k\tau d\tau} = -\frac{k}{\pi}, \quad (k=1, 2, \dots) \quad (7)$$

tehát λ_0 kivételével kettős multiplicitásuak. A sajátfüggvények:

$$\varphi_k(x) = \mu_k \cos kx + \nu_k \sin kx. \quad (8)$$

A $D(\lambda)$ transcendens, miután $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_k^2}$ konvergens:

$$D(\lambda) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\pi\lambda}{k} \right)^2 e^{-\frac{2\pi\lambda}{k}}. \quad (9)$$

Végül (52) szerint a resolvens mag számára a következő előállítást nyerjük:

$$K(\xi - x; \lambda) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n(\xi - x)}{n + \pi\lambda} =$$

$$= - \text{pars. real.} \left\{ e^{i\pi\lambda(\xi - x)} \int_0^{e^{i\pi(\xi - x)}} \frac{z^{\lambda}}{1 - z} dz \right\}, \quad (10)$$

hol az utóbbi előállítás csupán $\lambda > -\frac{1}{\pi}$ esetén érvényes. Nem érdektelen a mag első iteráltját előállítani, melyre (30) a

$$K_1(\xi - x) = \int_0^{2\pi} \log \left(2 \left| \sin \frac{\xi - \tau}{2} \right| \right) \log \left(2 \left| \sin \frac{\tau - x}{2} \right| \right) d\tau =$$

$$= \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n(\xi - x)}{n^2} = \frac{\pi}{6} - \frac{|\xi - x|}{2} + \frac{(\xi - x)^2}{4\pi}$$

formulát adja.¹ —

★

¹ L. D. HILBERT: Grundzüge, Kap. IX. p. 76.

A singuláris FREDHOLM-féle egyenletek közül először PICARD egyik példáját tárgyaljuk:¹

$$\varphi(x) - \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|\xi-x|} \varphi(\xi) d\xi = f(x), \quad (11)$$

melynek magja nyilván eleget tesz a 4. §-ban követelt föltételeknek. A spektrum, azaz a sajátértékek halmaza (37) szerint:

$$\lambda(\sigma) = \frac{1}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|\tau|+i\sigma\tau} d\tau} = \frac{1+\sigma^2}{2} \quad (-\infty \leq \sigma \leq +\infty)$$

tehát a spektrum folytonos s a reális tengely $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ segmentumát kétszeresen tölti be.² A mennyiben a $+\sigma$ és $-\sigma$ «folytonos» indexhez tartozó $\lambda(\sigma)$ értékek egyenlők, a sajátértékek kettős multiplicitásuaknak mondhatók. Ennek megfelelően a $\lambda(\sigma)$ sajátértékhez tartozó sajátfüggvény

$$\varphi(|\sigma|, x) = \mu e^{i\sigma x} + \nu e^{-i\sigma x},$$

hol μ, ν tetszőleges állandók.

A resolvens mag minden oly λ értékre, mely nem tartozik a spektrumhoz, a következő alakban állítható elő:

$$K(x-\xi; \lambda) = \frac{e^{-(1-2\lambda)|\xi-x|}}{1-2\lambda}; \quad \left(\lambda < \frac{1}{2}\right). \quad -$$

A következő, nem symmetrikus maggal bíró integrálegyenlet példa arra, midőn a spektrum a komplex sík egy görbéjét tölti be:

$$\varphi(x) - \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\alpha+\xi-x)^2} \varphi(\xi) d\xi = 0; \quad (\alpha \text{ tetszőleges állandó}) \quad (12)$$

Ebben az esetben a spektrum:

$$\lambda(\sigma) = \frac{1}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\alpha+\tau)^2 + i\sigma\tau} d\tau} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{\frac{\sigma^2}{4}} (\cos \alpha\sigma + i \sin \alpha\sigma), \quad (-\infty \leq \sigma \leq +\infty)$$

¹ L. E. PICARD: Sur une équation intégrale singulière. [Comptes-Rendus, 1910. X. 3.]

² Ha végtelenné váló megoldásokat is megengedünk, úgy a $(0, \frac{1}{2})$ intervallum is a spektrumhoz számítandó.

azaz a spektrum két spirálisból áll, melyek a reális tengely + $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ pontjából indulnak ki s egymásnak ugyanezen tengelyre vonatkozó tükörképei. Ezen spirálisok egymást végtelen sok pontban metszik, s az e metszéspontokhoz tartozó λ értékek kettős multiplicitású sajátértékek. A resolvens mag a jelen esetben:

$$K(\xi - x; \lambda) = e^{\alpha(\xi - x)} \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda \sqrt{\pi})^{k-1} \frac{1}{\sqrt{k}} e^{-k\alpha^2 - \frac{(\xi - x)^2}{k}}; \quad \left(\lambda < \frac{1}{\sqrt{\pi}} \right). -$$

Még a következő, először HARDY által tárgyalt példát említjük fel, melynek magja ugyan nem teljesíti a korábbi föltételeket, azonban rá nézve a következő eredmények könnyen verifikálhatók:¹

$$\varphi(x) - \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\xi - x)}{\xi - x} \varphi(\xi) d\xi = 0. \quad (13)$$

Ezen példánál a spektrum véges számú pontból áll, ugyanis:

$$\lambda(\sigma) = \frac{1}{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \tau}{\tau} e^{i\sigma\tau} d\tau} = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \\ \frac{2}{\pi} \\ \frac{1}{\pi} \\ \infty \end{cases}, \quad \text{ha } |\sigma| \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} 1,$$

tehát a spektrumot az $\frac{1}{\pi}$ és $\frac{2}{\pi}$ pontok alkotják. Viszont az $\frac{1}{\pi}$ sajátérték multiplicitása kontinuumnyinak mondható, a menyiben minden

$$\int_{-1}^{+1} f(\sigma) e^{i\sigma x} d\sigma$$

kifejezés — hol $f(\sigma)$ tetszőleges — egy, az $\frac{1}{\pi}$ sajátértékhez tartozó sajátfüggvény.

¹ L. G. H. HARDY: On an integral equation. [London Math. Society Proceedings, 1909, pp. 445—72.]

Ha $f(\sigma) = (1 - \sigma^2)^{n - \frac{1}{2}}$ tesszük, úgy a

$$J_n(x) - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\xi - x)}{\xi - x} J_n(\xi) d\xi = 0 \quad (14)$$

formulához jutunk, melynek $n = 0$ speciális esete HOBSONNÁL található.¹

Az előbbi példa magjából könnyen szerkeszthetünk olyat, melynek spektruma discrét, denombrabilis pontthalmaz. Ezen eset áll fönn pl. a

$$\varphi(x) - \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\xi - x)}{1 - 2r \cos(\xi - x) + r^2} \frac{1}{\xi - x} \varphi(\xi) d\xi = 0; |r| < 1 \quad (15)$$

integrálegyenletnél. Ennek spektruma ugyanis:

$$\lambda(\sigma) = \frac{1}{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \tau}{1 - 2r \cos \tau + r^2} e^{i\sigma\tau} \frac{d\tau}{\tau}} = \frac{1}{2 \int_0^\infty \sum_{n=1}^\infty r^{n-1} \frac{\sin nx \cos \sigma x}{x} dx}$$

s ha $|\sigma|$ egyenlő valamely k egészszámmal:

$$\lambda_k = \frac{2(1-r)}{\pi r^{k-1}(1+r)}; \quad (k = \infty, 1, 2, \dots)$$

ellenkező esetben $[\sigma]$ -val jelölve a $|\sigma|$ -ban foglalt legnagyobb egészszámot:

$$\lambda(\sigma) = \frac{1-r}{\pi \cdot r^{[\sigma]}},$$

tehát a spektrum discrét számértékekből áll, melyek közül az előbbiek kettős, az utóbbiak «kontinuumnyi» multiplicitásúak.

A változó határokkal bíró integrálegyenletekről szóló §-ban példákat fogunk találni oly magokra, melyeknek sajátértékei denombrabilisen végtelen multiplicitásúak.

¹ L. GRAY and MATHEWS: Bessel's functions.

7. §. Alkalmazás a síkbeli Dirichlet-problema néhány esetére.

A DIRICHLET-problémának integrálegyenletek segítségével való megoldása tudvalevőleg két különböző úton történhet. Egyik esetben a megoldást egy kettős réteg potenciálja alakjában keressük s ekkor a probléma egy másodfajú FREDHOLM-féle egyenletre vezet. A másik esetben egy egyszerű réteg potenciálja alakjában törekszünk a megoldást előállítani s ekkor a réteg sűrűségének meghatározása egy elsőfajú FREDHOLM-féle egyenlettől függ.¹

Legyenek az előírt kerületi értékek a határoló C görbe s parameterének $f(s)$ integrabilis függvénye által adva, továbbá C hossza ezen parameterben kifejezve 2π , akkor a $\varrho(\sigma)$ sűrűség meghatározására szolgáló elsőfajú integrálegyenlet:

$$f(s) = \int_0^{2\pi} \log \frac{1}{r_{s\sigma}} \varrho(\sigma) d\sigma. \quad (16)$$

A $\log \frac{1}{r_{s\sigma}}$ mag symmetrikus s miként PICARD kimutatta, általában zárt. A négyzetükkel együtt integrabilis függvények tartományában való oldhatóságának feltétele tehát, hogy a

$$\sum_{(n)} \lambda_n^2 \left\{ \int_0^{2\pi} f(s) \varphi_n(s) ds \right\}^2 \quad (17)$$

sor konvergens legyen, hol λ_n , φ_n a $\log \frac{1}{r_{s\sigma}}$ maghoz tartozó sajátértékeket s -függvényeket jelentik. A megoldhatóság tehát lényegesen függ úgy a C -görbe alakjától, mint az előírt kerületi értékektől.

Közelebbről fogjuk vizsgálni azon eseteket, midőn a C -görbe kör és ellipszis. R sugarú kör esetében

$$\log \frac{1}{r_{s\sigma}} = -\log \left(2R \left| \sin \frac{s-\sigma}{2} \right| \right), \quad (18)$$

¹ L. E. PICARD l. c.

² L. 5. §.

tehát lényegileg egyezik az előző §-ban vizsgált egyik maggal s így az ott talált eredmények szerint a sajátértékek s -függvények:

$$\lambda_0 = \frac{1}{2\pi \log \frac{1}{R}}; \quad \lambda_{\pm n} = \frac{n}{\pi} \quad (n=1, 2, \dots)$$

$$\varphi_0 = 1; \quad \varphi_n(s) = \cos ns; \quad \varphi_{-n}(s) = \sin ns.$$

Tehát az előbb idézett tétel szerint kör esetében a DIRICHLET-probléma megoldható egy egyszerű réteg potenciáljával, melynél a sűrűséget előállító függvény négyzetével együtt integrálható, ha, A_n és B_n -el jelölve az adott $f(s)$ FOURIER együtthatóit:

$$\sum_{(n)} n^2 (A_n^2 + B_n^2)$$

konvergens.¹

Ha e föltétel teljesül, úgy $\varrho(s)$ FOURIER sora az (16) integrálegyenlet s az (Első rész (55)) formulák alapján:

$$\varrho(s) = \frac{A_0}{2\pi \log \frac{1}{R}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nA_n}{\pi} \cos ns + \frac{nB_n}{\pi} \sin ns, \quad (19)$$

tehát a DIRICHLET-probléma megoldása r, ϑ polárkoordinátákban:

$$\left. \begin{aligned} V(r, \vartheta) &= \int_0^{2\pi} \log \sqrt{R^2 - 2Rr \cos(\vartheta - \sigma) + r^2} \varrho(\sigma) d\sigma = \\ &= \frac{1}{2\pi_0} \int_0^{2\pi} \log(R^2 - 2Rr \cos(\vartheta - \sigma) + r^2) \left\{ \frac{A_0}{2 \log \frac{1}{R}} + \right. \\ &+ \left. \sum_{n=1}^{\infty} (nA_n \cos n\sigma + nB_n \sin n\sigma) \right\} d\sigma = \\ &= -\frac{A_0}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{2Rr \sin(\vartheta - \sigma)}{R^2 - 2Rr \cos(\vartheta - \sigma) + r^2} \cdot \\ &\quad \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ -A_n \sin n\sigma + B_n \cos n\sigma \right\} d\sigma, \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

mely a POISSON-éhoz teljesen analog formula, hol azonban az adott $f(s)$ függvény konjugáltja szerepel.

¹ L. E. PICARD, l. c.

A Poisson-féle formulához juthatunk, ha (16) magvával nem $\log \frac{1}{r_{s\sigma}}$, hanem ennek konjugáltját, $\operatorname{arctg} \frac{\sin s - \sin \sigma}{\cos s - \cos \sigma}$ -t választjuk. Ekkor, minthogy

$$\begin{aligned} \operatorname{arctg} \frac{\sin s - \sin \sigma}{\cos s - \cos \sigma} &= \operatorname{arctg} \left(-\cot \frac{s+\sigma}{2} \right) = -\frac{\pi}{2} + \frac{s+\sigma}{2} = \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n(s+\sigma)}{n},^1 \end{aligned}$$

tehát a sajátértékek:

$$\lambda_0 = \infty; \lambda_{\pm n} = \pm \frac{n}{\pi}$$

a sajátfüggvények, valamint az A_n , B_n -ekre vonatkozó föltételek ugyanazok, mint előbb, csupán az utóbbiakhoz járul $\lambda_0 = \infty$ folytán az

$$A_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(s) ds = 0$$

föltétel. A DIRICHLET-problema megoldása ez esetben:

$$\begin{aligned} V(r, \vartheta) &= \int_0^{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{r \sin \vartheta - R \sin \sigma}{r \cos \vartheta - R \cos \sigma} \varrho(\sigma) d\sigma = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{r \sin \vartheta - R \sin \sigma}{r \cos \vartheta - R \cos \sigma} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} -n A_n \sin n\sigma + n B_n \cos n\sigma \right\} d\sigma = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{2R^2 - 2Rr \cos(\vartheta - \sigma)}{R^2 - 2Rr \cos(\vartheta - \sigma) + r^2} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\sigma + B_n \sin n\sigma \right\} d\sigma = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\vartheta - \sigma) + r^2} f(\sigma) d\sigma. \end{aligned}$$

Hogy az ellipsis esetében az analog problémát elintézhessük, mindenekelőtt szükségünk van a

$$\log \frac{1}{r_{s\sigma}}; \operatorname{arctg} \frac{y_s - y_\sigma}{x_s - x_\sigma}$$

¹ Arctg alatt azon ívet értve, mely $-\pi$ és $+\pi$ közt van. Ekkor a sor minden s, σ értékre érvényes.

függvényekre, hol $r_{s\sigma}$ az s és σ parameterértékekhez tartozó (x_s, y_s) , (x_σ, y_σ) pontok távolságát jelenti. A ϑ , σ elliptikus koordinátákat vezetve be, melyek x, y -al a

$$x = \frac{e^\vartheta + e^{-\vartheta}}{2} \cos \sigma; \quad y = \frac{e^\vartheta - e^{-\vartheta}}{2} \sin \sigma \quad \begin{matrix} (0 \leq \vartheta \leq \infty) \\ (0 \leq \sigma \leq 2\pi) \end{matrix} \quad (22)$$

kapcsolatban állnak, az említett függvényeket a következő alakban fejezhetjük ki:¹ Legyen $\vartheta_0 = \text{const.}$ az adott ellipsis A és B tengelyekkel, továbbá

$$z_\sigma = x_\sigma + iy_\sigma = \cos(\sigma - i\vartheta_0); \quad z_s = x_s + iy_s = \cos(s - i\vartheta)$$

ekkor

$$\begin{aligned} \log r_{s\sigma} + i \operatorname{arctg} \frac{y_s - y_\sigma}{x_s - x_\sigma} &= \log(z_s - z_\sigma) = \\ &= \log \left\{ -2 \cdot \sin \left(\frac{s - \sigma}{2} - i \frac{\vartheta_0 - \vartheta}{2} \right) \sin \left(\frac{s + \sigma}{2} - i \frac{\vartheta_0 + \vartheta}{2} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (23)$$

Ha $\vartheta = \vartheta_0$, vagyis az s pont is a ϑ_0 ellipsisen van, úgy a

$$\sin(a - ib) = \frac{-(e^{ia+b} - e^{-ia-b}) e^{i\frac{\pi}{2}}}{2}$$

relatiót felhasználva:

$$\log(z_s - z_\sigma) = \log \left\{ \sin \frac{s - \sigma}{2} \cdot e^{\vartheta_0 + i \left(\frac{s + \sigma}{2} + \frac{\pi}{2} \right)} (1 - e^{-2\vartheta_0 - i(s + \sigma)}) \right\},$$

tehát az $e^{-2\vartheta_0} = \frac{A-B}{A+B}$ valódi törtet q -val jelölve:

$$\log \frac{1}{r_{s\sigma}} = -\vartheta_0 - \log \left| \sin \frac{s - \sigma}{2} \right| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n} \cos n(s + \sigma) = \quad (24)$$

$$= \log \frac{2}{A+B} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos n(s - \sigma) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n} \sin n(s + \sigma)$$

$$\operatorname{arctg} \frac{y_s - y_\sigma}{x_s - x_\sigma} = \frac{\pi + s + \sigma}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n} \sin n(s + \sigma), \quad (25)$$

¹ L. J. PLEMELJ: Potentialtheoretische Untersuchungen (71—73 o.).

tehát a nyert függvények kielégítik azon föltételeket, melyek mellett korábbi eredményeink alkalmazhatók.

Hogy a fenti problémát megoldhassuk, először meg kell határoznunk a $\log \frac{1}{r_{s\sigma}}$ -hoz tartozó sajátértékeket s függvényeket. Miután a jelen esetben (l. 5. §.)

$$a_0 + a'_0 = \log \frac{2}{A+B}; \quad a_n = \frac{q^n}{n}, \quad b_n = 0 \\ a'_n = \frac{1}{n}, \quad b'_n = 0$$

tehát [Első rész, (51) és (52)] szerint

$$\lambda_0 = \frac{1}{2\pi \log \frac{2}{A+B}}; \quad \lambda_n = \frac{n}{\pi(1+q^n)}; \quad \lambda_{-n} = \frac{n}{\pi(1-q^n)} \quad (26)$$

$$\varphi_0 = 1; \quad \varphi_n(x) = \cos nx; \quad \varphi_{-n}(x) = \sin nx$$

s ennek alapján kimondhatjuk: *Az ellipsis esetében a DIRICHLET-probléma megoldható egy egyszerű réteg potenciáljával, melynél a sűrűséget előállító függvény négyzetével együtt integrális, ha, az adott kerületi függvény FOURIER együtthatóit A_n , B_n -el jelölve,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 A_n^2}{(1+q^n)^2} + \frac{n^2 B_n^2}{(1-q^n)^2} \quad (27)$$

sor konvergens.

Ezen föltétel teljesülése esetén a (16) integrálegyenlet megoldása, azaz a sűrűséget előállító függvény (Első rész (55)) szerint:

$$\varrho(s) = \frac{A_0}{2\pi \log \frac{2}{A+B}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n A_n}{\pi(1+q^n)} \cos ns + \\ + \frac{n B_n}{\pi(1-q^n)} \sin ns; \quad \left(q = e^{-2\varphi_0} = \frac{A-B}{A+B} \right) \quad (28)$$

s a DIRICHLET-probléma megoldása:

$$V(p) = V(\vartheta, s) = \int_0^{2\pi} \log \frac{1}{r_{p\sigma}} \varrho(\sigma) d\sigma, \quad (29)$$

hol ϑ, s az ellipsis p belső pontjának elliptikus koordinátái. Hogy a megoldást soralakban nyerjük, csupán $\log \frac{1}{r_{p\sigma}}$ -t kell sorba fejtenünk azon esetre, midőn p belső pont. (23) alapján rövid számítással nyerjük:

$$\log \frac{1}{r_{p\sigma}} = \log \frac{2}{A+B} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n\vartheta_0}}{n} \{ (e^{n\vartheta} + e^{-n\vartheta}) \cos ns \cos n\sigma + (e^{n\vartheta} - e^{-n\vartheta}) \sin ns \sin n\sigma \}. \quad (30)$$

Végül a (28, 30) sorokból a PARSEVAL-formula alapján $V(\vartheta, s)$ számára a következő, először PLEMJEL által más úton levezetett sort nyerjük:

$$V(\vartheta, s) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{e^{n\vartheta} + e^{-n\vartheta}}{e^{n\vartheta_0} + e^{-n\vartheta_0}} \cos ns + B_n \frac{e^{n\vartheta} - e^{-n\vartheta}}{e^{n\vartheta_0} - e^{-n\vartheta_0}} \sin ns. \quad (31)$$

A módszer alkalmazhatóságának bemutatása kedvéért még röviden tárgyaljuk a $\nabla^2 u + k^2 u = 0$ egyenletnek adott kerületi értékek melletti megoldását kör esetében. Ezen egyenletnek egy partikuláris megoldása tudvalevőleg $J_0(kr)$, hol J_0 a nulad fajú BESSEL-függvényt s, r a tekintetbe vett pontnak egy tetszőleges, fix ponttól való távolságát jelenti. Tehát egy, adott $f(s)$ kerületi értékeket fölvevő megoldást a

$$V(p) = \int_0^{2\pi} J_0(kr_{p\sigma}) \varrho(\sigma) d\sigma \quad (32)$$

alakban állíthatunk elő, ha az adott $f(s)$ függvény esetén a

$$f(s) = \int_0^{2\pi} J_0(kr_{s\sigma}) \varrho(\sigma) d\sigma \quad (33)$$

elsőfajú integrálegyenlet megoldható. R sugarú kör esetén

$$r_{s\sigma} = 2R \left| \sin \frac{s-\sigma}{2} \right|,$$

tehát (32) magja egy ismert formula szerint ¹

$$K(s, \sigma) = J_0 \left(2kR \left| \sin \frac{s-\sigma}{2} \right| \right) = J_0^2(kR) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_n^2(kR) \cos n(s-\sigma).$$

A sajátértékek tehát

$$\lambda_n = \frac{1}{2\pi J_n^2(kR)} \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

s a sajátfüggvények ismét $1, \sin nx, \cos nx$. A (33) megoldhatóságának szükséges és elegendő feltétele tehát, hogy

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n^2 + B_n^2}{J_n^4(kR)} \quad (34)$$

konvergens legyen, hol A_n, B_n ismét $f(s)$ FOURIER együtthatói. Ha valamelyike az $J_n(kR)$ mennyiségeknek eltűnik, úgy tudvalevőleg a $\nabla^2(u) + k^2u = 0$ egyenletnek van egy zérustól különböző megoldása, mely a kerületen eltűnik:²

$$J_n(kr) (\mu \cos n\vartheta + \nu \sin n\vartheta). \quad (\mu, \nu \text{ tetszőleges állandók.})$$

Ez esetben adott $f(s)$ kerületi értékek mellett nyilván csak akkor lesz megoldás, ha

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\tau) \cos n\tau d\tau = 0; \quad B_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\tau) \sin n\tau d\tau = 0,$$

azaz ha $f(s)$ ortogonális a kerületen a $\nabla^2u + k^2u = 0$ esetleg létező sajátfüggvényeihez.

Ha úgy ezek, mint a (34) konvergentia feltétel teljesülnek, úgy $\varrho(\sigma)$ FOURIER sora (Első rész (55)) szerint a következő:

$$\varrho(\sigma) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{J_n^2(kR)} \cos n\sigma + \frac{B_n}{J_n^2(kR)} \sin n\sigma. \quad (35)$$

¹ L. GREY and MATTHEWS: Bessel's Functions.

² L. RIEMANN—WEBER: Partielle Differentialgleichungen. Bd. II.

Minthogy továbbá, ha $p(r, \vartheta)$ a kör egy belső $s(R, \sigma)$ egy körületi pontja:

$$\begin{aligned} J_0(kr_{p\sigma}) &= J_0(k\sqrt{r^2 - 2rR \cos(\vartheta - \sigma) + R^2}) = \\ &= J_0(kr) J_0(kR) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_n(kr) J_n(kR) \cos n(\vartheta - \sigma), \end{aligned}$$

tehát a probléma megoldása:

$$\begin{aligned} V(p) = V(r, \vartheta) &= \int_0^{2\pi} J_0(kr_{p\sigma}) \varrho(\sigma) d\sigma = \frac{A_0 J_0(kr)}{2J_0(kR)} + \\ &+ \sum_1^{\infty} A_n \frac{J_n(kr)}{J_n(kR)} \cos k\vartheta + B_n \frac{J_n(kr)}{J_n(kR)} \sin k\vartheta. \end{aligned} \quad (36)$$

Ebből $r = 0$ esetben, azaz a kör középpontjára vonatkozólag:

$$V(0, 0) = \int_0^{2\pi} \varrho(\sigma) d\sigma = \frac{A_0}{2J_0(kR)} = \frac{1}{2\pi J_0(kR)} \int_0^{2\pi} f(\sigma) d\sigma, \quad (37)$$

a mi WEBERnek egy ismert formulája.

8. §. Változó határokkal bíró integrálegyenletek.

A változó határokkal bíró integrálegyenletek, mint ismert, mindig úgy foghatók föl, mint állandó határokkal bírók speciális esetei; ha ugyanis az utóbbiakban a magot a definiálási tartomány egyes részein zérussal egyenlőnek választjuk, mindig változó határokkal bíró integrálegyenletet nyerünk.

Ily integrálegyenletek, mint a következőkből is ki fog tűnni, mindenkor a singulárisak közé számítandók, a mennyiben sajátértékeik és sajátfüggvényeik vagy egyáltalán nincsenek, vagy, ha vannak, úgy rájuk a reguláris egyenleteknél megismert tételek nem érvényesek. Továbbá, mint látni fogjuk, ezen integrálegyenleteknél, ellentétben a regulárisakkal, a mag periodicitásának föltételezése sem szükséges.

Először oly integrálegyenletekkel foglalkozunk, melyeknek mindkét határa változó, ellenben e határok különbsége állandó:

$$\varphi(x) - \lambda \int_x^{a+x} K(\xi - x) \varphi(\xi) d\xi = f(x). \quad (38)$$

Ily integrálegyenletek tudvalevőleg az elektron dinamikájában fordulnak elő s P. HERTZ,¹ valamint G. HERGLOTZ² foglalkoztak velük először behatóbban.

Ezen integrálegyenletek közvetlenül fölfoghatók, mint $(-\infty, +\infty)$ határokkal bírók, melyeknek magja: $K^*(\xi-x)$ következő módon van definiálva:

$$\begin{aligned} K^*(\xi-x) &= K(\xi-x), \quad \text{ha } 0 \leq \xi-x \leq a \\ K^*(\xi-x) &= 0, \quad \text{ha } \xi-x < 0, \quad \text{vagy } a < \xi-x, \end{aligned}$$

tehát a 4. §-ban ismertetett tételek rájuk alkalmazhatók. Ily módon a sajátértékek (36) alapján

$$\lambda(\sigma) = \frac{1}{\int_0^a K(\tau) e^{i\sigma\tau} d\tau} \quad (-\infty \leq \sigma \leq +\infty) \quad (39)$$

s miután, mint HERGLOTZ kimutatta (l. c), a

$$\int_0^a K(\tau) e^{i\sigma\tau} d\tau = C$$

egyenletnek minden C értékre végtelen sok gyöke van, melyek a végesben nem sűrűsödhetnek,³ tehát (38)-ban oly integrálegyenletre találtunk példát, melynél minden sajátértékhez megszámlálhatóan végtelen sok sajátfüggvény tartozik. Ugyanis a

$$\varphi(\sigma_n, x) = e^{i\sigma_n x} \quad (n=1, 2, \dots) \quad (40)$$

függvények mindegyike, hol σ_n az $\int_0^a K(\tau) e^{i\sigma\tau} d\tau = \frac{1}{\lambda}$ egyenlet egy gyöke, egy, a λ sajátértékhez tartozó sajátfüggvény.

A (38) integrálegyenlet resolvens magjára (Első rész (38)) közvetlenül a

¹ L. P. HERTZ: Bewegung eines Elektrons. [Math. Ann. LXV. 61—86.]

² G. HERGLOTZ: Integralgleichungen der Elektronentheorie. [Math. Ann. LXV. 86—106.]

³ $\int_0^a K(\tau) e^{i\sigma\tau} d\tau$ transcendens egész volta miatt.

$$K(\xi - x; \lambda) = K(\xi - x) + \frac{\lambda}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left[\int_0^a K(\tau) e^{i\sigma\tau} d\tau \right]^2}{1 - \lambda \int_0^a K(\tau) e^{i\sigma\tau} d\tau} e^{i\sigma(x-\xi)} d\sigma \quad (41)$$

formulát adja, melyet már l. c. HERGLÖTZ föllállított. —

Másik typusa a változó határokkal bíró integrálegyenleteknek a VOLTERRA-féle, melynél csupán az egyik határ változó, s melyet most a következő alakban írunk:

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^x K(x-\xi) \varphi(\xi) d\xi = f(x). \quad (42)$$

Ezen integrálegyenlet nem redukálódik ugyan a korábban vizsgált s megoldott typusok egyikére sem, azonban megoldása könnyen nyerhető zárt alakban azon sorból, melyet VOLTERRA az általános esetre föllállított. Minthogy pedig tudvalevőleg ily VOLTERRA-féle egyenleteknek sajátértékeik és sajátfüggvényeik nincsenek, tehát csupán az inhomogén egyenlet megoldásával, illetőleg a resolvens mag meghatározásával kell foglalkoznunk.

Mindenekelőtt a következő megjegyzést bocsátjuk előre: Ha $\varphi(x)$ megoldása a (42) egyenletnek, úgy $\varphi(x) e^{qx}$, hol q tetszőleges állandó, megoldása azon VOLTERRA-féle egyenletnek, melynek magja $K(x-\xi) e^{q(x-\xi)}$ s jobboldali tagja $f(x) e^{qx}$, mint az (42)-nek e^{qx} -el való szorzása után közvetlenül belátható.

Tegyük föl már most, hogy q -t elegendő nagynak választva, $K(\tau) e^{-q\tau}$ a $(0, \infty)$ intervallumban absolut integrabilis, továbbá terjesszük ki a (42) VOLTERRA-egyenlet K^* magjának definitióját az egész $(-\infty, +\infty)$ intervallumra, úgy, hogy az 0-tól $+\infty$ -ig megegyezzek $K(\tau) e^{-q\tau}$ -val s $-\infty$ -tól 0-ig identikusan eltűnjék.

Ezen VOLTERRA-egyenlet resolvens magjának ismert sora:¹

$$K^*(x-\xi; \lambda) = K^*(x-\xi) + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n K_n^*(x-\xi); \quad (43)$$

¹ L. pl. T. LALESKO: Théorie des equations integrales, pp. 7—10.

hol

$$\begin{aligned} K_1^*(x-\xi) &= \int_{-\infty}^x K^*(x-\tau) K^*(\tau-\xi) d\xi, \dots, \\ K_n^*(x-\xi) &= \int_{-\infty}^x K^*(x-\tau) K_{n-1}^*(\tau-\xi) d\tau \end{aligned} \quad (44)$$

a mag iteráltjai. Nyilván ezen iterált integrálokban a mag definiíójánál fogva integrációhatárokul ξ , x helyett $-\infty$, $+\infty$ is vehetők. Továbbá, ezen iterált integrálok mindegyike $x-\xi$ argumentumának folytonos, véges variációjú, abszolút integrabilis függvénye lévén, FOURIER-integrállal előállítható s ezen előállítások a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(a) h(x-a) da = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} g(a) e^{i\sigma a} da \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} h(a) e^{i\sigma a} da \right\} e^{i\sigma x} d\sigma \quad (44)$$

reláció folytán,¹ mint könnyen belátható, a

$$\begin{aligned} K_1^*(x-\xi) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [X(\sigma)]^2 e^{-i\sigma(\xi-x)} d\sigma, \dots \\ K_n^*(x-\xi) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [X(\sigma)]^{n+1} e^{-i\sigma(\xi-x)} d\sigma; \quad X(\sigma) = \int_0^{\infty} K^*(\tau) e^{i\sigma\tau} d\tau \end{aligned} \quad (45)$$

alakra hozhatók.

Ha mármost λ tetszésszerűen módon van választva, úgy a korábbi feltételek mellett ϱ mindig választható oly nagyra hogy

$$|X(\sigma)| = \left| \int_0^{\infty} K^*(\tau) e^{i\sigma\tau} d\tau \right| = \left| \int_0^{\infty} K(\tau) e^{(-\varrho+i\sigma)\tau} d\tau \right| < \frac{1}{|\lambda|} \cdot (-\infty \leq \sigma \leq +\infty)$$

Ekkor tehát a resolvens magot előállító sor

$$K^*(x-\xi; \lambda) = K^*(x-\xi) + \frac{\lambda}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \int_{-\infty}^{+\infty} [X(\sigma)]^{n+2} e^{-i\sigma(x-\xi)} d\sigma$$

közvetlenül összegezhető s eredményül nyerjük:

¹ A formula, mely nyilván analogonja a Fourier-sorokra érvényes Parseval-f. formulának, a mondott feltételek mellett könnyen verifikálható az integrációk sorrendje fölcserélésével.

$$K^*(x-\xi; \lambda) = K^*(x-\xi) + \frac{\lambda}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left[\int_0^{\infty} K^*(\tau) e^{i\sigma\tau} d\tau \right]^2}{1 - \lambda \int_0^{\infty} K^*(\tau) e^{i\sigma\tau} d\tau} e^{-i\sigma(x-\xi)} d\sigma \quad (46)$$

tehát a korábbi megjegyzés figyelembevételével az adott VOLTERRA-egyenlet resolvens magja:

$$\begin{aligned} K(x-\xi; \lambda) &= e^{q(x-\xi)} K^*(x-\xi; \lambda) = \\ &= K(x-\xi) + \frac{\lambda}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left[\int_0^{\infty} K(\tau) e^{(-q+i\sigma)\tau} d\tau \right]^2}{1 - \lambda \int_0^{\infty} K(\tau) e^{(-q+i\sigma)\tau} d\tau} e^{(q-i\sigma)(x-\xi)} d\sigma. \end{aligned} \quad (47)$$

Ebből közvetlenül

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^{\infty} K(x-\xi; \lambda) f(\xi) d\xi \quad (48)$$

s ha $f(x)$ is FOURIER-integrállal előállítható, úgy könnyű átalakítással:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\int_0^{\infty} f(\tau) e^{(-q+i\sigma)\tau} d\tau}{1 - \lambda \int_0^{\infty} K(\tau) e^{(-q+i\sigma)\tau} d\tau} e^{(q-i\sigma)x} d\sigma, \quad (49)$$

mely formulát már előbb M. HAFEN más úton vezetett le.¹

Ezen eredményeknek egy alkalmazását mutatjuk még be a következő, BELTRAMI-tól eredő functionális egyenletnél:

$$f(x) = \varphi(x) + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{1}{\sqrt{x}}}^{\infty} \varphi \left[x - \frac{1}{a^2} \right] e^{-a^2} da, \quad (50)$$

mely az $x - \frac{1}{a^2} = \xi$ transzformációval közvetlenül a

$$\varphi(x) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \frac{e^{-\frac{1}{x-\xi}}}{(x-\xi)^{3/2}} \varphi(\xi) d\xi = f(x) \quad (51)$$

VOLTERRA-egyenletbe megy át.

¹ L. M. HAFEN: Probleme der Potentialtheorie. [Math. Ann. Bd. 65. pp. 517—37.]

Miután jelen esetben a mag abszolút integrabilis, tehát a korábbi formulákban $\varrho = 0$ tehető. E szerint

$$X(\sigma) = \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{\tau} + i\sigma\tau} \frac{d\tau}{\tau^{3/2}} = 2 \int_{-\infty i}^{\infty} e^{-\tau^2 - \frac{i\sigma}{\tau^2}} d\tau = \sqrt{\pi} e^{-2\sqrt{i}\sigma}, \quad (52)$$

hol a négyzetgyök azon értéke veendő, melynek reális része pozitív.

Továbbá, miután a mag jelen esetben folytonos, véges variációjú, abszolút integrabilis, tehát FOURIER-integrállal állítható elő, melyet a resolvens mag (47) FOURIER-integráljába bevonva, az utóbbira a következő előállítást nyerjük:

$$\begin{aligned} K(x-\xi; \lambda) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\int_0^{\infty} K(\tau) e^{i\sigma\tau} d\tau}{1 - \lambda \int_0^{\infty} K(\tau) e^{i\sigma\tau} d\tau} e^{-i\sigma(x-\xi)} d\sigma = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda \sqrt{\pi})^{n-1} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-n\sqrt{i}\sigma - i\sigma(x-\xi)} d\sigma = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda \sqrt{\pi})^{n-1} n e^{-\frac{n^2}{x-\xi}} \frac{1}{(x-\xi)^{3/2}}. \end{aligned} \quad (53)$$

Ezen resolvens mag segítségével, továbbá λ -nak (51)-beli értékét figyelembe véve, a megoldásra (48) szerint a következő előállítást nyerjük

$$\varphi(x) = f(x) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x f(\xi) \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{e^{-\frac{n^2}{x-\xi}}}{(x-\xi)^{3/2}} d\xi, \quad (54)$$

a mi egyezik BELTRAMI eredményével.¹

Egerváry Jenő.

¹ L. Fortschritte d. Mathematik. 1901. (Kap: Functionalgleichungen.)

A LAPLACE-SORRÓL.

Bevezetés.

Ha az (r, ϑ, φ) polárkoordinátákkal megadott pontban kiszámítjuk az egységgömbön eloszlott elektromos tömeg potenciálját, melynek sűrűsége az egységgömb (ϑ', φ') pontjában $f(\vartheta', \varphi')$, nyerjük (mivel (r, ϑ, φ) távolsága az egységgömb (ϑ', φ') pontjától $= \sqrt{1-2r \cos \gamma + r^2}$, a hol

$$\cos \gamma = \cos \vartheta \cos \vartheta' + \sin \vartheta \cdot \sin \vartheta' \cdot \cos (\varphi - \varphi'):$$

$$V = \int \frac{f(\vartheta', \varphi') dS}{\sqrt{1-2r \cos \gamma + r^2}} = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{f(\vartheta', \varphi') \sin \vartheta' d\vartheta' d\varphi'}{\sqrt{1-2r \cos \gamma + r^2}}.$$

(dS az egységgömb eleme)

Már most, ha $r < 1$ (azaz belső pontról van szó):

$$\frac{1}{\sqrt{1-2r \cos \gamma + r^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \gamma) \cdot r^n,$$

ahol P_n , mint könnyen belátható, n -edfokú polinomja $\cos \gamma$ -nak, az ú. n. LEGENDRE-polynom; ha pedig $r > 1$ (külső pont):

$$\frac{1}{\sqrt{1-2r \cos \gamma + r^2}} = \frac{1}{r} : \sqrt{1 - \frac{2 \cos \gamma}{r} + \frac{1}{r^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n(\cos \gamma)}{r^{n+1}};$$

ezeket a sorokat V értékébe helyettesítve, a potenciálnak r hatványai szerint haladó sorfejtését nyerjük. Alkalmazva már most az ú. n. Poisson-féle egyenletet, mely szerint a potenciál normális szerinti differenciálhányadosa a hatófelületen szakadást szenved, melynek nagysága $= 4\pi \cdot a$ felületi sűrűség,

kapjuk (tekintve, hogy a gömbnél a normális egybeesik a sugárral):

$$\lim_{r=1-0} \frac{\partial V}{\partial r} - \lim_{r=1+0} \frac{\partial V}{\partial r} = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} f(\vartheta', \varphi') P_n(\cos \gamma) \sin \vartheta' d\vartheta' d\varphi' = 4\pi \cdot f(\vartheta, \varphi),$$

azaz kapjuk az egységgömbön megadott tetszőleges függvény sorbafejtését. A fenti megfontolás azonban bizonyító erővel nem bír és a sorfejtés konvergenciája kétséges.

Jelen dolgozat II—V. fejezete ezen sorfejtés tüzetes megvizsgálását tartalmazza, az I. fejezet pedig a LEGENDRE-polynó-mok mindazon tulajdonságának levezetését, melyre ennél a vizsgálatnál szükség van; úgyhogy e dolgozat megértéséhez az analysis elemeinek és a CAUCHY-féle residuumtételnek ismerete teljesen elegendő.

I. FEJEZET.

A Legendre-polynomok.

1. Ha az

$$F(z, x) = \frac{1}{\sqrt{1-2zx+z^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) \cdot z^n \quad (1^\circ)$$

egyenletben z helyett z^2 -ot írunk, z -vel szorzunk, z szerint differenciálunk és végül ismét z^2 helyett z -t írunk, nyerjük a

$$G(z, x) = \frac{1-z^2}{(1-2zx+z^2)^{3/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) P_n(x) \cdot z^n \quad (2^\circ)$$

egyenletet.

2. Ha (1°) -et szorozzuk $(z-1)$ -el és differenciálunk z szerint:

$$\frac{(1-x)(1+z)}{(1-2zx+z^2)^{3/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) (P_n(x) - P_{n+1}(x)) z^n,$$

másfelől (2°) -t összeszorozva az

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

egyenlettel, kapjuk:

$$\frac{1+z}{(1-2zx+z^2)^{3/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} (P_0 + 3P_1(x) + \dots + (2n+1)P_n(x)) z^n$$

egyenletet; ezt az előbbivel összehasonlítva, nyerjük a CHRISTOFFEL-formulát:

$$P_0 + 3P_1(x) + \dots + (2n+1)P_n(x) = (n+1) \cdot \frac{P_n(x) - P_{n+1}(x)}{1-x}. \quad (3^\circ)$$

3. Alkossuk meg az

$$\int_{-1}^{+1} F(z, x) F(u, x) dx$$

integrált. Ez egyfelől egyenlő a

$$\sum_{n,m} \int_{-1}^{+1} P_n P_m dx \cdot z^n u^m$$

kétszeres sorral; másfelől a határozatlan integráció elvégezhető, mert az integrandus a recziprok értéke egy x -ben másodfokú kifejezés négyzetgyökének és ilyen módon kapjuk, hogy az integrálunk értéke

$$\frac{1}{\sqrt{uz}} \log \frac{1+\sqrt{uz}}{1-\sqrt{uz}} = \sum_n \frac{2}{2n+1} z^n u^n.$$

Ezt az előbbi sorral összehasonlítva, nyerjük ¹ a következő képleteket:

$$\int_{-1}^{+1} P_n(x) P_m(x) dx = \int_0^\pi P_n(\cos \gamma) P_m(\cos \gamma) \sin \gamma d\gamma = 0 \quad (n \neq m) \quad (4^\circ)$$

$$\int_{-1}^{+1} P_n^2(x) dx = \int_0^\pi P_n^2(\cos \gamma) \sin \gamma d\gamma = \frac{2}{2n+1} \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

4. Legyen

$$-1 \leq x \leq +1, \quad \cos \gamma = x \quad (0 \leq \gamma \leq \pi), \quad \xi = e^{\gamma i}, \quad \bar{\xi} = e^{-\gamma i}.^2$$

¹ Ez az ú. l. eléggé ismeretlen egyszerű bizonyítása a (4°) képleteknek HERMITE-től való (Correspondence d'Hermite et de Stieltjes T. 1.).

² A következőkben γ és $\xi, \bar{\xi}$ mindig ugyanezen értelemben vannak használva.

Akkor

$$F(z, x) = \frac{1}{\sqrt{1-z\xi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-z\bar{\xi}}} = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n-1/2}{n} \xi^n z^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n-1/2}{n} \bar{\xi}^n z^n,$$

tehát

$$|P_n(x)| = \left| \sum_{k=0}^n \binom{k-1/2}{k} \binom{n-k-1/2}{n-k} \xi^k \bar{\xi}^{n-k} \right| \leq \quad (5^\circ) \\ \leq \sum_{k=0}^n \binom{k-1/2}{k} \binom{n-k-1/2}{n-k} = 1.$$

5. Legyen

$$-1 < x < +1.$$

Mivel

$$\sqrt{1-2zx+z^2} = \sqrt{(z-\xi)(z-\bar{\xi})},$$

$F(z, x)$ szinguláris helyei ξ és $\bar{\xi}$ (a hol a nevező eltűnik) az egységkörön fekszenek. A residium-tétel adja:

$$P_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \int F(z, x) \frac{dz}{z^{n+1}}$$

véve az integrált pozitív értelemben egy tetszőleges zárt görbén, mely a 0 pontot körülveszi és a ξ és $\bar{\xi}$ helyeket kizárja.

Ebből az $u = \frac{1}{z}$ helyettesítéssel lesz:

$$P_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int F(u, x) u^n du$$

véve az integrált negatív értelemben egy tetszőleges zárt görbén, mely a ξ és $\bar{\xi}$ helyeket körülzárja. Ezt a görbét át is vezethetjük a szinguláris helyeken, mert bennük az integrandus integrálhatóan válik végtelenné; azonban egy szinguláris ponton áthaladva meg kell változtatni F -ben a gyökjel értelmét. Válaszszuk tehát az integráció útját így: $\bar{\xi}$ -től a 0-ig egyenes vonal-

ban, onnan ξ -ig újra egyenesen és aztán vissza ugyanezen úton. Akkor lesz :

$$P_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_0^{\xi} F(u, x) w dx + \text{három analog integrál.}$$

Az első integrálban $u = t \cdot \xi$ (t reális és 0-tól 1-ig változik, a míg u 0-tól ξ -ig megy) és

$$\begin{aligned} |du| &= dt, & |w^n| &= t^n \\ |u - \xi| &= 1 - t \\ |u - \bar{\xi}| &\geq \sin \gamma = \sqrt{1-x^2}, \end{aligned}$$

tehát az első integrál abszolútértékre nézve kisebb, mint

$$\frac{1}{\pi^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sin \gamma}} \cdot \int_0^1 \frac{t^n dt}{\sqrt{1-t}}.$$

Ugyanezt a megbecsülést kapjuk a másik három integrálra és mivel¹

$$\int_0^1 \frac{t^n dt}{\sqrt{1-t}} < \frac{c_1}{\sqrt{n+1}},$$

kapjuk

$$|P_n(x)| = |P_n(\cos \gamma)| < \frac{c_2}{\sqrt{(n+1) \sin \gamma}} = \frac{c_2}{\sqrt{n+1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (6^\circ)$$

a mely egyenlőtlenség persze $x = \pm 1$ esetén is érvényes.²

6. Vizsgáljuk meg most a $P_n - P_{n+2}$ különbséget. Legyen újra $-1 < x < +1$; ugyanolyan megfontolással, mint az 5. pontban, kapjuk :

¹ Ennek az integrálnak, ill. a vele egyenlő $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} \varphi \cdot d\varphi$ -nek kiszámítása és megbecslése majdnem minden analysis-tankönyvben megtalálható, pl. CESÁRO : Lehrbuch der algebraischen Analysis, 718. oldal. c_1, c_2, \dots, c_{13} alkalmas konstansokat jelentenek.

² STIELTJES (Annales de la Faculté d. Sciences d. Toulouse (1) 4. p. 117.).

$$P_n(x) - P_{n+2}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{1-u^2}{\sqrt{1-2ux+u^2}} u^n du,$$

a hol az integrációs út ugyanaz a törött vonal, mint az előbbi pontban. Ezt az integrált ismét négy részre bontom; a 0-tól ξ -ig terjedő részre kapom $u = t\xi$ téve

$$\left| \frac{1-u^2\xi^2}{\sqrt{u-\xi}} \right| = \left| \frac{u^2-\xi^2}{\sqrt{u-\xi}} \right| = |(u+\xi)\sqrt{u-\xi}| \leq 2$$

és így ez a rész kisebb, mint (l. az előbbi pontot):

$$\frac{1}{2\pi} \cdot 2 \int_0^1 \frac{t^n dt}{\sqrt{1-t}} < \frac{1}{\pi} \cdot \frac{c_1}{\sqrt{n+1}},$$

ugyanaz a megbecsülés áll a másik három integrálra is és így kapjuk

$$|P_n(x) - P_{n+2}(x)| = |P_n(\cos \gamma) - P_{n+2}(\cos \gamma)| < \frac{c_3}{\sqrt{n+1}}, \quad (7^\circ)$$

a mely persze igaz $x = \pm 1$ esetén is.¹

II. FEJEZET.

Folytonos függvény divergens Laplace-sorral.

Legyen $f(\vartheta, \varphi)$ az egységgömbön megadott függvénye a ϑ, φ geográfiai koordinátáknak (ϑ a pólustávolság, φ a földrajzi szélesség), a melyről feltesszük, hogy az egységgömbön LEBESGUE-féle értelemben integrálható.² Jelöljük (ϑ', φ') -vel az S egységgömb egy változó pontját, (ϑ, φ) -vel egy fix pontját, γ -val e két pont gömbi távolságát

$$(\cos \gamma = \cos \vartheta \cdot \cos \vartheta' + \sin \vartheta \cdot \sin \vartheta' \cos (\varphi - \varphi')).$$

¹ STIELTJES (Correspondence d'Hermite et de Stieltjes T. II, pag. 175.), a ki az (5°) egyenletből vezeti le.

² A LEBESGUE-féle integrálfogalmat nem ismerő olvasók gondoljanak olyan függvényre, melynek integrálja a klasszikus értelemben *abszolút* konvergens.

A

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} f(\vartheta', \varphi') P_n(\cos \gamma) \sin \vartheta' d\vartheta' d\varphi' \quad (L)$$

sort (melynek tagjai a (ϑ, φ) pont függvényei) nevezzük az $f(\vartheta, \varphi)$ -hez tartozó LAPLACE-sornak. FEJÉR LIPÓT 1908-ban a M. Tud. Akadémiában bemutatott dolgozatában,¹ mely először foglalkozik az (L)-sor összegezhetőségével és kiindulópontja volt az erre a sorra vonatkozó újabb irodalomnak, fölveti azt a kérdést, hogy egy *folytonos* függvény LAPLACE-sora lehet-e *divergens* valamely pontban. HAAR ALFRÉD adta meg a feleletet erre a kérdésre,² a mennyiben kimutatta a létezését olyan *folytonos függvénynek*, melynek LAPLACE-sora egy pontban *divergens*. Ebben a fejezetben egy egyszerű szerkezetű példát adok ilyen folytonos függvényre.

Legyen

$$f_{\nu}(\gamma) = \sqrt{\nu+1} (P_{\nu}(\cos \gamma) - P_{\nu+2}(\cos \gamma)) (1 - \cos \gamma); \quad (8^{\circ})$$

akkor az I. f. (7°) alapján

$$|f_{\nu}(\gamma)| < \sqrt{\nu+1} \cdot \frac{c_3}{\sqrt{\nu+1}} 2 = 2c_3. \quad (9^{\circ})$$

Legyen most $\nu_n = n^6$ és alkossuk meg a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_{\nu_n}(\gamma)}{n^2}$$

sort. Ez a sor az előbbi egyenlőtlenségből folyólag egyenletesen konvergens és így γ -nak folytonos függvénye; jelöljük $\Phi(\gamma)$ -val. Az $f(\vartheta, \varphi) = \Phi(\vartheta)$ az egységgömbön folytonos függvény, melynek LAPLACE-sorát a pólusban, tehát a $\vartheta = 0$ pontban akarom megvizsgálni. Ebben a pontban függvényünk LAPLACE-sorának általános tagja (mert itt $\gamma = \vartheta'$)

¹ Mathematische Annalen Bd. 67-ben németül is megjelent.

² Dissertációjában.

$$\begin{aligned} \frac{2n+1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^\pi \Phi(\gamma) P_n(\cos \gamma) \sin \gamma d\gamma d\varphi = \\ = \frac{2n+1}{2} \int_0^\pi \Phi(\gamma) P_n(\cos \gamma) \sin \gamma d\gamma \end{aligned}$$

és a k -adik részletösszege a CHRISTOFFEL-formula (I. f. 3°) felhasználásával

$$s_k = \int_0^\pi \Phi(\gamma) \frac{k+1}{2} \cdot \frac{P_k(\cos \gamma) - P_{k+1}(\cos \gamma)}{1 - \cos \gamma} \sin \gamma d\gamma.$$

Ha most ide Φ értékét behelyettesítjük és az egyenletes konvergencia által feljogosítva az integrációt tagonként végezzük, kapjuk

$$\begin{aligned} s_k &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \int_0^\pi f_{\nu_n}(\gamma) \frac{k+1}{2} \cdot \frac{P_k - P_{k+1}}{1 - \cos \gamma} \sin \gamma d\gamma = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \int_0^\pi \sqrt{\nu_n+1} (P_{\nu_n} - P_{\nu_n+2}) \frac{k+1}{2} (P_k - P_{k+1}) \sin \gamma d\gamma = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sqrt{\nu_n+1} \frac{k+1}{2} \int_{-1}^{+1} (P_{\nu_n}(x) - P_{\nu_n+2}(x)) (P_k(x) - P_{k+1}(x)) dx. \end{aligned}$$

Ha $k = n^6$, ebben az összegben az I. f. (4°) képletei szerint minden tag kiesik, kivéve az n -diket (mert hiszen $\nu_n = n^6$) és lesz

$$\begin{aligned} s_{n^6} &= \frac{1}{n^2} \sqrt{n^6+1} \frac{n^6+1}{2} \int_{-1}^{+1} (P_{n^6} - P_{n^6+2}) (P_{n^6} - P_{n^6+1}) dx = \\ &= \frac{1}{n^2} \sqrt{n^6+1} \frac{n^6+1}{2} \int_{-1}^{+1} P_{n^6}^2 dx = \frac{1}{n^2} \sqrt{n^6+1} \frac{n^6+1}{2} \cdot \frac{2}{2n^6+1}, \end{aligned}$$

tehát

$$s_{n^6} > \frac{n}{2}$$

és így

$$\lim s_{n^6} = +\infty.$$

Bebizonyítottuk tehát, hogy függvényünk, mely az egész egységömbön folytonos (és a pólusban az értéke 0) olyan, hogy LAPLACE-sora a pólusban divergens.

III. FEJEZET.

A Laplace-sor összegezése számtani közepekkel.

Az előbbi fejezetben láttuk a lehetőségét annak, hogy egy folytonos függvény LAPLACE-sorának részletösszegei divergáljanak. Fölmerül így az a feladat, hogy a LAPLACE-sorból megalkossunk más, lehetőleg egyszerű kifejezéseket, melyek minden folytonos függvény esetében konvergálnak és határértékül a függvény értékét adják meg. Ezt a feladatot FEJÉR oldotta meg először, idézett munkájában. FEJÉR eljárása a következő:

Jelöljük az $f(\vartheta, \varphi)$ (L)-sorának n -dik részletösszegét $s_n \{f(\vartheta, \varphi)\}$ -vel. Alkossuk meg a részletösszegek számtani közepeit (a sor elsőrendű számtani közepeit):

$$s_n^{(1)} \{f(\vartheta, \varphi)\} = \frac{1}{n+1} (s_0 + s_1 + s_2 + \dots + s_n)$$

és ezeknek újból a számtani közepeit (a másodrendű számtani közepeket):

$$\sigma_n = \frac{1}{n+1} (s_0^{(1)} + s_1^{(1)} + s_2^{(1)} + \dots + s_n^{(1)}).$$

FEJÉR kimutatja, hogy ha a kifejtett függvény a szóbanforgó pontban folytonos, akkor σ_n a függvényérték felé konvergál. Dolgozata végén pedig felveti a kérdést: divergálhatnak-e folytonos függvény esetében az elsőrendű számtani közepek? ERRE GRONWALL felelt meg — miután előbb egy speciális esetre HAAR¹ intézte el a kérdést — kimutatván a következő tételt:

Ha $f(\vartheta, \varphi)$ az egységömbön megadott LEBESGUE-féle értelem-

¹ GRONWALL: Mathematische Annalen Bd. 74., HAAR: Rendiconti d. Circolo Matematico di Palermo, T. XXXII. 1911 (2°), pag. 132.

ben integrális függvény a (ϑ, φ) pontban folytonos, akkor LAPLACE-sorának elsőrendű számtani közepei konvergálnak és megadják határértéket a függvényértéket.

A következő sorok ennek a tételnek egyszerű és rövid bizonyítását adják,¹ mely lényegesen különbözik GRONWALL komplikált megbecsüléseken nyugvó bizonyításától.

Mindenekelőtt végezzünk egy koordináta-transzformációt úgy, hogy a szóbanforgó pont legyen az új pólus. Ha azt a függvényét az új koordinátáknak, melybe $f(\vartheta, \varphi)$ a transzformációnál átmegy, ismét csak f -el és az új koordinátákat megint (ϑ, φ) -vel jelöljük, akkor (mivel most $\gamma = \vartheta$) szó van tehát a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} f(\gamma, \varphi) P_n(\cos \gamma) \sin \gamma d\gamma d\varphi$$

sor elsőrendű számtani közepeiről. A CHRISTOFFEL-formula (I. f. 3°) szerint

$$s_n \{f\} = \frac{n+1}{4\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} f(\gamma, \varphi) \frac{P_n(\cos \gamma) - P_{n+1}(\cos \gamma)}{1 - \cos \gamma} \sin \gamma d\gamma d\varphi$$

és ha rövidség kedvéért bevezetjük az

$$\frac{1}{n+1} (P_0 + P_1(\cos \gamma) + \dots + P_n(\cos \gamma)) = U_n(\cos \gamma)$$

jelölést, kapjuk

$$s_n^{(1)} \{f\} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} f(\gamma, \varphi) \frac{U_n(\cos \gamma) - P_{n+1}(\cos \gamma)}{1 - \cos \gamma} \sin \gamma d\gamma d\varphi.$$

Mivel az I. f. (4°) szerint egy állandóra képezve a LAPLACE-sort az első tag maga az állandó lesz, a többi pedig 0:

$$f(0, 0) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} f(0, 0) \frac{U_n - P_{n+1}}{1 - \cos \gamma} \sin \gamma d\gamma d\varphi$$

¹ Francia nyelven már közöltem a Comptes Rendus des séances de l'Académie des Sciences 156. kötetében.

és így

$$s_n^{(1)} \{f\} - f(0, 0) = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (f(r, \varphi) - f(0, 0)) \frac{U_n - P_{n+1}}{1 - \cos r} \sin r dr d\varphi.$$

Ennek az integrálnak a magját az I. f. (5°) és (6°) szerint megbecsüljük. Először is (5°) szerint

$$|U_n| \leq \frac{1+1+\dots+1}{n+1} = 1$$

és (6°) szerint

$$|U_n| < \frac{1}{n+1} \cdot \frac{c_2}{\sqrt{\sin r}} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) < \frac{c_4}{\sqrt{(n+1) \sin r}},$$

tehát

$$\left| \frac{U_n - P_{n+1}}{1 - \cos r} \right| \leq \frac{2}{1 - \cos r} \quad (10^\circ)$$

és

$$\left| \frac{U_n - P_{n+1}}{1 - \cos r} \right| < \frac{c_5}{\sqrt{(n+1) \sin r (1 - \cos r)}}; \quad (11^\circ)$$

végül, miután ez a mag nem egyéb, mint a $\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) P_n$ sor részletösszegeinek számtani közepe, a melynek n -dik részletösszege kisebb mint

$$1+3+5+\dots+(2n+1) = (n+1)^2,$$

kapjuk még, hogy

$$\left| \frac{U_n - P_{n+1}}{1 - \cos r} \right| < (n+1)^2. \quad (12^\circ)$$

Legyen már most ε egy tetszőlegesen választott pozitív szám. Határozzuk meg $\delta = \delta(\varepsilon)$ -t oly kicsinynek, hogy

$$|f(r, \varphi) - f(0, 0)| < \varepsilon,$$

ha

$$0 \leq r \leq \delta,$$

a mi a pólusban feltételezett folytonosságnál fogva lehetséges és egyszersmind, hogy

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\pi-\delta}^{\pi} \int_0^{2\pi} |f(\gamma, \varphi) - f(0, 0)| \sin \gamma d\gamma d\varphi < \varepsilon,$$

a mi f feltételezett integrálhatóságánál fogva lehetséges. Akkor az

$$\begin{aligned} & |s_n^{(1)} \{f\} - f(0, 0)| \leq \\ & \leq \frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} |f(\gamma, \varphi) - f(0, 0)| \left| \frac{U_n - P_{n+1}}{1 - \cos \gamma} \right| \sin \gamma d\gamma d\varphi \end{aligned}$$

egyenlőtlenségben bontsuk fel a jobboldali integrált három részre. Az elsőben $0 \leq \gamma \leq \delta$, a másodikban $\delta \leq \gamma \leq \pi - \delta$, a harmadikban $\pi - \delta \leq \gamma \leq \pi$. Jelöljük őket rendre I_1 , I_2 , I_3 -al.

A δ választásánál fogva

$$\begin{aligned} I_1 & < \varepsilon \cdot \frac{1}{4\pi} \int_0^{\delta} \int_0^{2\pi} \left| \frac{U_n(\cos \gamma) - P_{n+1}(\cos \gamma)}{1 - \cos \gamma} \right| \sin \gamma d\gamma d\varphi < \\ & < \varepsilon \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| \frac{U_n - P_{n+1}}{1 - \cos \gamma} \right| \sin \gamma d\gamma = \frac{\varepsilon}{2} \int_0^1 \left| \frac{U_n(x) - P_{n+1}(x)}{1 - x} \right| dx. \end{aligned}$$

Ezt az integrált most két részre bontjuk: 0-tól $\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)$ -ig és innen 1-ig. (11°) szerint (mivel $x = \cos \gamma$, $\sqrt{1-x^2} = \sin \gamma$)

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{1 - \frac{1}{(n+1)^2}} \right| & < \frac{c_5}{\sqrt{n+1}} \int_0^{1 - \frac{1}{(n+1)^2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2} (1-x)} < \frac{c_5}{\sqrt{n+1}} \int_0^{1 - \frac{1}{(n+1)^2}} \frac{dx}{(1-x)^{3/4}} = \\ & = \frac{c_5}{\sqrt{n+1}} \left[4 \frac{1}{(1-x)^{1/4}} \right]_0^{1 - \frac{1}{(n+1)^2}} < 4c_5 \end{aligned}$$

és (12°) szerint

$$\left| \int_{1 - \frac{1}{(n+1)^2}}^1 \right| < \int_{1 - \frac{1}{(n+1)^2}}^1 (n+1)^2 dx = 1,$$

tehát

$$I_1 < \varepsilon/2 (4c_5 + 1) = \varepsilon c_6.$$

I_3 -ra pedig, mivel benne $\cos \gamma$ negatív és így

$$\frac{1}{1 - \cos \gamma} < 1,$$

(10°) szerint és a δ választásánál fogva kapjuk

$$I_3 < 2\varepsilon.$$

I_2 -nél, (11°) szerint:

$$\begin{aligned} I_2 &< \frac{1}{4\pi} \int_{\delta}^{\pi-\delta} \int_0^{2\pi} |f(\gamma, \varphi) - f(0, 0)| \frac{c_5}{\sqrt{(n+1) \sin \gamma (1 - \cos \gamma)}} \sin \gamma d\gamma d\varphi < \\ &< \frac{c_5}{\sqrt{n+1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sin \delta (1 - \cos \delta)}} \cdot \frac{1}{4\pi} \int_{\delta}^{\pi-\delta} \int_0^{2\pi} |f(\gamma, \varphi) - f(0, 0)| \sin \gamma d\gamma d\varphi; \end{aligned}$$

most pedig választható $N = N(\delta) = N(\varepsilon)$ (mivel δ csak az ε -től függ) úgy, hogy ennek az egyenlőtlenségnek jobboldala kisebb, mint ε , ha $n > N$.

Összefoglalva I_1 , I_2 , I_3 -ra talált megbecsüléseinket, azt látjuk, hogy egy tetszőlegesen megadott ε pozitív számhoz található egy N úgy, hogy

$$|s_n^{(1)}\{f\} - f(0, 0)| < \varepsilon(c_6 + 3),$$

ha

$$n > N.$$

Tehát

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n^{(1)}\{f\} = f(0, 0). \quad \text{Qu. e. d.}$$

Látjuk, hogy ebben a bizonyításban a folytonosságot csupán a δ megválasztásánál használtuk ki. Ha tehát függvényünk az egységkömbnek egy tartományában egyenletesen folytonos, ez a δ az ε -hoz a tartomány minden pontjára nézve közösnek választható és így a N is: azaz az elsőrendű számtani közeppek egyenletesen konvergálnak ebben a tartományban a függvény felé.

Könnyen belátható továbbá, hogy a folytonosság feltétele pótolható azzal a tágabb feltétellel, hogy

$$\lim_{h=0} \frac{1}{h} \int_0^h \int_0^{2\pi} |f(r, \varphi) - f(0, 0)| \sin r dr d\varphi$$

létezzék és 0 legyen.

IV. FEJEZET.

A $\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) P_n(\cos r)$ sor k -adrendű számtani közepei.

Ha az

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots$$

hatványsort megszorozzuk az ($k \geq 0$):

$$\frac{1}{(1-z)^{1+k}} = 1 + \binom{1+k}{1} z + \dots + \binom{n+k}{n} z^n + \dots$$

hatványsorral és a formálisan képzett szorzatban z^n együtt-hatóját $S_n^{(k)}$ -et elosztjuk $\binom{n+k}{n}$ -el, kapjuk a $\sum a_n$ sor n -dik k -adrendű számtani közepét.

Ha

$$\lim_{n=\infty} \frac{S_n^{(k)}}{\binom{n+k}{n}}$$

létezik, ezt a sor összegének és a sort k -adrendben összegezhetőnek nevezzük. A 0-adrendű közepek, mint látható, maguk a sor részletösszegei és így a 0-adrendű összegezhetőség azonos a konvergenciával. Azt is látjuk, hogy $k=1$ esetében definíciónk összeesik a III. f.-ben adottal.

Könnyen kimutatható a következő tétel (melyet egyébként nem használok fel és ezért nem is bizonyítok be): Ha egy sor k -adrendben összegezhető, akkor minden magasabb rendben is összegezhető és összegül ugyanazt a számot kapjuk. E szerint egy sor divergenciája mintegy annál súlyosabb természetű, minél magasabb rendben következik csak be az összegezhetőség, ha ugyan egyáltalán bekövetkezik. Folytonos függvény LAPLACE-soráról láttuk a II. f.-ben, hogy divergens is lehet, a III. f.-ben pedig, hogy összegezhető. Felmerül tehát az az érdekes feladat,

hogy a LAPLACE-sor divergenciájának természetét ebből a szempontból behatóbban megvizsgáljuk. Ezt a vizsgálatot a következő fejezetben végzem el, e fejezetben pedig előre bocsájtom a

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) P_n(\cos \gamma) \quad (13^\circ)$$

sor k -adrendű közepeinek a megvizsgálását,¹ melynek eredményére támaszkodik a következő fejezet.

Legyen $x = \cos \gamma$. A (13°) sor n -dik k -adrendű közepét

$$\frac{S_n^{(k)}(x)}{\binom{n+k}{n}} \cdot \text{el}$$

jelölve, $S_n^{(k)}(x)$ a definíció szerint z^n együtthatója az

$$\frac{1}{(1-z)^{1+k}} \cdot \frac{1-z^2}{(1-2zx+z^2)^{3/2}} = \frac{1}{(1-z)^{1+k}} \cdot G(z, x)$$

hatványsorában. A residuum-tételt alkalmazva (ugyanúgy, mint az I. f. 5. pontjában) kapjuk

$$\begin{aligned} S_n^{(k)}(x) &= \frac{1}{2\pi i} \int G(u, x) \cdot \frac{u^{1+k} \cdot u^n}{(u-1)^{1+k}} du = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int \frac{u^{n+1+k}}{(u-1)^k} \cdot \frac{-(u+1)}{(1-2ux+u^2)^{3/2}} du \end{aligned}$$

vége az integrált negatív értelemben egy tetszőleges zárt görbén, mely a $\xi = e^{ri}$, $\bar{\xi} = e^{-ri}$ és 1 pontokat körülveszi. Ha már most $k < 1$, az egységponton át lehet húzni ezt a görbét; hogy milyen ágát kell választani az integrandusnak a görbe különböző részein, az nem érdekel minket, mert mi csak az abszolútértéket fogjuk megbecsülni és integrandusunk bármely ágának ugyanaz az abszolútértéke.

Legyen $\sin \gamma = \sqrt{1-x^2} \geq \frac{4}{n+1}$; húzzunk ξ és $\bar{\xi}$ köré $\frac{1}{n+1}$

¹ Először RIESZ MARCEL és CHAPMAN foglalkoztak ezzel, de eredményeik nem elég pontosak a céljaimhoz.

sugárral köröket; C_1 -et és C_2 -t, jelöljük ezek metszéspontját az 0ξ és $0\bar{\xi}$ sugarakkal μ és $\bar{\mu}$ -al (tehát $\mu = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\xi$ és $\bar{\mu} = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\bar{\xi}$). Válasszuk integrációs útnak a következőt: 0μ egyenes, C_1 kör, $\mu 0$ egyenes, 01 egyenes, ezen vissza, $0\bar{\mu}$ egyenes, C_2 kör, $\bar{\mu} 0$ egyenes.

A következő megbecslések jobb megértéséhez czélszerű, ha az olvasó egy rajzot készít magának.

Az 0μ darabon ($|u|=t$):

$$|u^{n+1+k}| < 1, \quad |du| = dt, \quad |u - \xi| = 1 - t, \quad |u - \bar{\xi}| \geq \sin \gamma = \sqrt{1-x^2},$$

$$|u-1| > \sin \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{1-x}{2}}, \quad |u+1| < 2,$$

tehát

$$\left| \int_{0\mu} \right| < \left(\sqrt{\frac{2}{1-x}} \right)^k \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right)^{3/2} \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{t^{n+1} dt}{(1-t)^{3/2}},$$

mivel az itt fellépő integrálnak értéke $\frac{1}{2} (\sqrt{n+1}-1)$, kapjuk

$$\left| \int_{0\mu} \right| < \frac{c_7 \cdot \sqrt{n+1}}{(1-x)^{k/2+3/4} (1+x)^{3/4}}.$$

Ugyanez áll az $0\bar{\mu}$ darabra is.

A C_1 körön:

$$|u - \xi| = \frac{1}{n+1}, \quad |u - \bar{\xi}| \geq \sin \gamma = \sqrt{1-x^2},$$

$$|u^{n+1+k}| \leq \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1+k} < 4, \quad |u+1| < 3,$$

$$|u-1| \geq 2 \sin \frac{\gamma}{2} - \frac{1}{n+1} \geq \sqrt{2(1-x)} - \frac{1}{4} \sqrt{1-x^2} > \sqrt{1-x},$$

tehát

$$\begin{aligned} \left| \int_{c_1} \right| &< \left(\frac{1}{\sqrt{1-x}} \right)^k \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right)^{3/2} (n+1)^{3/2} 3 \cdot 4 \cdot \int_{c_1} |du| < \\ &< \frac{c_8 \sqrt{n+1}}{(1-x)^{k/2+3/4} (1+x)^{3/4}}. \end{aligned}$$

Ugyanez áll a C_2 -re is.

Az 01 darabon végül

$$\frac{1-u}{\sqrt{1-2ux+u^2}} = \frac{1-u}{|u-\xi|} < 1,^1 \quad |u-\xi| = |u-\bar{\xi}| \geq \frac{\sqrt{1-x}}{2},$$

$$u^{n+k+1} \leq 1, \quad u+1 \leq 2;$$

felbontva ezt az integrált két részre: 0-tól $\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$ -ig és innen 1-ig, kapjuk az első részre, hogy az kisebb, mint

$$\int_0^{1-\frac{1}{n+1}} \frac{1}{(1-u)^{1+k/2}} \left(\frac{1-u}{\sqrt{1-2ux+u^2}} \right)^{1-k/2} \frac{2du}{(1-2ux+u^2)^{1+k/4}} <$$

$$< 2 \cdot \left(\frac{2}{1-x} \right)^{1+k/4} \int_0^{1-\frac{1}{n+1}} \frac{du}{(1-u)^{1+k/2}} < \frac{c_9 (n+1)^{k/2}}{(1-x)^{1+k/4}},$$

a másik rész pedig kisebb, mint:

$$\int_{1-\frac{1}{n+1}}^1 \frac{1}{(1-u)^k} \cdot \frac{2du}{(1-2ux+u^2)^{3/2}} < \left(\frac{2}{1-x} \right)^{3/2} \cdot 2 \cdot \int_{1-\frac{1}{n+1}}^1 \frac{du}{(1-u)^k} <$$

$$< \frac{c_{10}}{(1-x)^{3/2}} \cdot \left(\frac{1}{n+1} \right)^{1-k}$$

Ha mindezen megbecsüléseket tekintetbe vesszük, melyeket az $S_n^{(k)}(x)$ -et előállító integrál egyes részeire kaptunk és még megjegyezzük, hogy $\binom{n+k}{n} > c_{11} (n+1)^k$, nyerjük a következő egyenlőtlenséget:

$$\left| \frac{S_n^{(k)}(x)}{\binom{n+k}{n}} \right| < c_{12} \left(\frac{1}{(n+1)^{k-1/2}} \frac{1}{(1-x)^{k/2+3/4}} \frac{1}{(1+x)^{3/4}} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{(n+1)^{k/2}} \cdot \frac{1}{(1-x)^{1+k/4}} + \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{(1-x)^{3/2}} \right),$$

ha

$$0 \leq k < 1,$$

¹ Ha $x > 0$; ha $x \leq 0$, láthatólag kisebb az egész 01-re vonatkozó integrál egy konstansnál (n -től és x -től függetlenül).

feltéve, hogy

$$\sqrt{1-x^2} \geq \frac{4}{n+1}.$$

Másfelől, mint a definícióból kitűnik, az n -dik k -adrendű közép nem egyéb, mint az első n részletösszegeknek bizonyos pozitív súlyokkal képezett középértéke (innen ered az elnevezés is); már pedig a (13°) sor n -dik részletösszege nem nagyobb, mint (I. f. 5°):

$$1+3+\dots+(2n+1)=(n+1)^2$$

és így a k -dik közepekre kapjuk:

$$\left| \frac{S_n^{(k)}(x)}{\binom{n+k}{n}} \right| \leq (n+1)^2, \quad (15^\circ)$$

ha

$$-1 \leq x \leq +1, \quad k \geq 0.$$

Negatív x -re pedig a CHRISTOFFEL-formula szerint az n -dik részletösszeg kisebb $2(n+1)$ -nél és így a k -adrendű n -dik közép is. Már most ha x negatív és $\sqrt{1-x^2} \leq \frac{4}{n+1}$, ez csak úgy lehet, hogy $\sqrt{1+x} < \frac{4}{n+1}$, $(1+x)^{3/4} < \left(\frac{4}{n+1}\right)^{3/2}$, tehát a (14°) egyenlőtlenség jobboldalának nagyságrendje ilyen x -ekre $(n+1)^{3/2-(k-1/2)} = (n+1)^{2-k}$ és így elég nagy n -ekre a jobboldal nagyobb $2(n+1)$ -nél, eo ipso a baloldalnál: vagyis $k > \frac{1}{2}$ esetében a (14°) érvényes még olyan negatív x -ekre is, melyekre $\sqrt{1-x^2} < \frac{4}{n+1}$, ha csak n elég nagy (de függetlenül az x -től).

V. FEJEZET.

A Laplace-sor k -adrendű számtani közepei.

Az előbbi fejezet eredményeire támaszkodva, most könnyen kimutathatjuk a következő tételt: ha $f(\vartheta, \varphi)$ az egységgömbön megadott, LEBESGUE-féle értelemben integrálható függvény eleget tesz a következő feltételeknek: 1. a (ϑ_0, φ_0) pontban folytonos, 2. még

$$\frac{f(\vartheta, \varphi)}{(1 + \cos \gamma)^{3/2}} \quad (\gamma \text{ a } (\vartheta, \varphi) \text{ gömbi távolsága } (\vartheta_0, \varphi_0) \text{ -tól})$$

is integrálható, akkor LAPLACE-sora minden $\frac{1}{2}$ -nél magasabb rendben összegezzhető a (ϑ_0, φ_0) pontban és összege a függvény-érték. A 2. feltétel, a mint látjuk, csak a (ϑ_0, φ_0) antipodusában szorítja meg a függvény viselkedését, mert $1 + \cos \gamma$ csak ott lesz 0, és pl. mindig teljesítve van, ha függvényünk az antipodus környezetében korlátos, vagy ha ott végtelenné is lesz, de csak úgy, hogy $(1 + \cos \gamma)$ -nak $\frac{1}{4}$ -nél alacsonyabb hatványával szorozva már korlátos marad.

Mint a III. f.-ben láttuk, az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy a (ϑ_0, φ_0) a pólus. Akkor az előbbi fejezet jelöléseit felhasználva $f(\vartheta, \varphi)$ LAPLACE-sorának a pólusban az n -dik k -adrendű közepe:

$$s_n^{(k)}\{f\} = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(\gamma, \varphi) \frac{S_n^{(k)}(\cos \gamma)}{\binom{n+k}{n}} \sin \gamma d\gamma d\varphi;$$

másfelől, úgy mint a III. f.-ben, belátható, hogy:

$$f(0, 0) = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(0, 0) \cdot \frac{S_n^{(k)}(\cos \gamma)}{\binom{n+k}{n}} \sin \gamma d\gamma d\varphi,$$

tehát

$$s_n^{(k)}\{f\} - f(0, 0) = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (f(\gamma, \varphi) - f(0, 0)) \frac{S_n^{(k)}(\cos \gamma)}{\binom{n+k}{n}} \sin \gamma d\gamma d\varphi.$$

Legyen már most ε egy tetszőlegesen kicsiny pozitív szám. Határozzuk meg $\delta = \delta(\varepsilon)$ -t oly kicsinynek, hogy

$$|f(\gamma, \varphi) - f(0, 0)| < \varepsilon,$$

ha

$$0 \leq \gamma \leq \delta,$$

a mi az 1. feltétel alapján lehetséges. Az

$$\begin{aligned}
 & |s_n^{(k)}\{f\} - f(0, 0)| \leq \\
 & \leq \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} |f(r, \varphi) - f(0, 0)| \left| \frac{S_n^{(k)}(\cos r)}{\binom{n+k}{n}} \right| \sin r dr d\varphi
 \end{aligned}$$

egyenlőtlenségben bontsuk fel a jobboldali integrált két részre. Az elsőben legyen $0 \leq r \leq \delta$, a másodikban $\delta \leq r \leq \pi$. Becsüljük meg ezeket külön. Az első rész δ választásánál fogva kisebb mint

$$\begin{aligned}
 & \varepsilon \cdot \frac{1}{4\pi} \int_0^\delta \int_0^{2\pi} \left| \frac{S_n^{(k)}(\cos r)}{\binom{n+k}{n}} \right| \sin r dr d\varphi < \\
 & < \varepsilon \cdot \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left| \frac{S_n^{(k)}(\cos r)}{\binom{n+k}{n}} \right| \sin r dr d\varphi = \\
 & = \frac{\varepsilon}{2} \int_{\frac{1}{2}}^1 \left| \frac{S_n^{(k)}(x)}{\binom{n+k}{n}} \right| dx.
 \end{aligned}$$

Bontsuk fel ezt az integrált ismét két részre:

$$\frac{1}{2} - \text{től} \left(1 - \left(\frac{4}{n+1} \right)^2 \right) - \text{ig},$$

innen 1-ig. Az első részben $\sqrt{1-x^2} > \sqrt{1-x} \geq \frac{4}{n+1}$, tehát alkalmazhatjuk a IV. f. (14°)-át és kapjuk (megjegyezve, hogy itt $1+x > 1$), hogy ez a rész kisebb, mint

$$\begin{aligned}
 c_{12} \cdot \int_{\frac{1}{2}}^{1 - \left(\frac{4}{n+1} \right)^2} & \left(\frac{1}{(n+1)^{k-1/2}} \cdot \frac{1}{(1-x)^{k/2+3/4}} + \frac{1}{(n+1)^{k/2}} \cdot \frac{1}{(1-x)^{1+k/4}} + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{(1-x)^{3/4}} \right) dx < c_{13},
 \end{aligned}$$

a másik részre pedig alkalmazva a IV. f. (15°)-át, kapjuk, hogy az kisebb mint

$$\int_{1 - \left(\frac{\varepsilon}{n+1}\right)^2}^1 (n+1)^2 dx = 16.$$

Tehát a $0 \leq \gamma \leq \delta$ rész kisebb mint $\varepsilon (c_{13} + 16)$.

A $\delta \leq \gamma \leq \pi$ részre pedig alkalmazva a IV. f. (14°)-át (mely $k > \frac{1}{2}$ lévén, egész -1 -ig érvényes, hacsak n elég nagy) kapjuk (megjegyezve még, hogy itt $1 - x \geq 1 - \cos \delta$):

$$\begin{aligned} c_{12} \left\{ \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{1}{(n+1)^{k-1/2}} \cdot \frac{|f(\gamma, \varphi) - f(0, 0)|}{(1 + \cos \gamma)^{3/4}} \cdot \frac{1}{(1 - \cos \delta)^{k/2 + 3/4}} \sin \gamma d\gamma d\varphi + \right. \\ \left. + \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{(n+1)^{k-1/2}} \cdot \frac{1}{(1 - \cos \delta)^{1+k/4}} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{(1 - \cos \delta)^{3/2}} \right) |f(\gamma, \varphi) - f(0, 0)| \sin \gamma d\gamma d\varphi \right\}, \end{aligned}$$

ez a kifejezés pedig, mivel a 2. feltétel teljesítve van és $k > \frac{1}{2}$, kisebb mint ε , hacsak $n > N = N(\delta) = N(\varepsilon)$.

Összefoglalva:

$$|s_n^{(k)} \{f\} - f(0, 0)| < \varepsilon (c_{13} + 17),$$

ha

$$n > N.$$

Ezzel tételünk bizonyítva van, sőt mint a III. f.-ben, itt is hozzátehetjük, hogy ha az 1. és 2. feltétel a gömbnek egy tartományában egyenletesen teljesítve van, az $s_n^{(k)} \{f\}$ egyenletesen konvergál e tartományban a függvényérték felé, és hogy az 1. feltétel pótolható egy tágabbal.

Most pedig kimutatom, hogy ha k egy tetszőleges $\frac{1}{2}$ -nél kisebb pozitív szám, van olyan az egész egységgömbön folytonos függvény, a melynek LAPLACE-sora a pólusban k -adrendben még nem összegezzhető.

Vegyük u. i. elő a II. f.-ben definiált $f_\nu(\gamma)$ függvényeket. A feltétel szerint pozitív $\frac{1}{2} - k$ számhoz megválasztható az α

egész szám úgy, hogy $a \left(\frac{1}{2} - k \right) - 2 \geq 1$. Legyen $\nu_n = n^a$; a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_{\nu_n}(\gamma)}{n^2}$$

egyenletesen konvergens sor (I. II. f.) által definiált $\Phi(\gamma)$ függvény az egész egységgömbön folytonos, de LAPLACE-sorának k -adrendű közepei a pólusban még divergálnak. Ugyanis egy sor csak úgy lehet k -adrendben összegezzhető, ha n -dik részletösszege n^k -val osztva korlátos marad. Már pedig vegyük függvényünk LAPLACE-sorának a pólusban n^a -dik részletösszegét; úgy, mint a II. f.-ben kapjuk, hogy ez a részletösszeg

$$s_{n^a} = \frac{1}{n^2} \sqrt[n^a+1]{n^a+1} \cdot \frac{n^a+1}{2} \cdot \frac{2}{2n^a+1} > \frac{1}{2} \cdot n^{\frac{a}{2}-2},$$

tehát

$$\frac{s_{n^a}}{(n^a)^k} > \frac{1}{2} n^{a(\frac{1}{2}-k)-2} > \frac{1}{2} \cdot n$$

és így $\frac{s_n}{n^k}$ nem korlátos minden n -re.

Ezzel jóformán teljesen megvizsgáltuk a folytonos függvény LAPLACE-sorának divergenciakarakterét. Láttuk, hogy minden $\frac{1}{2}$ -nél magasabb rendben a sor összegezzhető, ellenben általában nem lesz $\frac{1}{2}$ -nél alacsonyabb rendben összegezzhető. Elintézetlenül maradt maga az $\frac{1}{2}$ -edrendű összegezés. Talán más helyen visszatértek még erre és azoknak, a folytonosságnál megszorítóbb, feltételeknek megvizsgálására, melyek mellett $\frac{1}{2}$ -nél alacsonyabb rendben következik be az összegezzhetőség.

★

Végül köszönetemet kell kifejeznem tanáromnak, FEJÉR LIPÓTNAK, a ki érdeklődésemet a LAPLACE-SORRA irányította.

Lukács Ferencz.

KITŰZÖTT FELADAT.

Legyenek $\varphi(x)$ és $\phi(x)$ az $(a \dots b)$ számközben x -nek oly folytonos függvényei, hogy

$$m \leq \varphi(x) \leq M \quad m \leq \phi(x) \leq M,$$

hol m és M adott pozitív számok. Bebizonyítandó, hogy

$$\frac{\left(\int_a^b \varphi \phi dx\right)^2}{\int_a^b \varphi^2 dx \cdot \int_a^b \phi^2 dx} \geq \left(\frac{2Mm}{M^2 + m^2}\right)^2.$$

Kürschák.

A Matematikai és Physikai Társulat XXI. tanulóversenye.

A folyó évi október hó 24-én tartott XXI. tanulóversenyre Budapesten 62, Kolozsvárt 4 középiskolai érettségi vizsgálatot tett versenyző jelentkezett. A verseny mindkét helyen egyidejűleg zárt helyiségben, a Társulat számos tagjának felügyelete és ellenőrzése mellett, szabályszerűen folyt le. A verseny lefolyásáról mindkét helyen felvett jegyzőkönyv szerint a tételek kidolgozására engedett négy órai idő alatt Budapesten 27, Kolozsvárt 1 dolgozat adatott be. A múlt évben volt 68 versenyző és 42 dolgozat; ebben az évben volt 66 versenyző és 28 dolgozat.

A kitűzött tételek a következők voltak:

1. A K körvonal A és B pontjait egy k körív köti össze, mely a K kör területét két egyenlő részre osztja. Behizonyítandó, hogy a k körív hossza nagyobb, mint a K kör átmérője.

2. Legyen

$$-1 \leq ax^2 + bx + c \leq +1,$$

ha

$$-1 \leq x \leq +1.$$

Itt a, b, c valós számokat jelentenek. Behizonyítandó, hogy akkor

$$-4 \leq 2ax + b \leq +4,$$

midőn

$$-1 \leq x \leq +1.$$

3. Messe a K kör az ABC háromszög BC, CA, AB oldalait rendre az $A_1, A_2; B_1, B_2; C_1, C_2$ pontokban. Behizonyítandó, hogy ha az A_1, B_1, C_1 pontokban rendre a BC, CA, AB oldalakra emelt merőleges egyenesek egy pontban találkoznak, akkor az A_2, B_2, C_2 pontokban a BC, CA, AB oldalakra rendre emelt merőlegesek is egy pontban találkoznak.

A versenydolgozatok előzetes megbírálását Rátz László volt szíves vállalni. A teljes bíráló bizottság határozatáról az alábbi jegyzőkönyv számol be.

Jegyzőkönyv

a XXI. matematikai tanulóversenyen beadott dolgozatok elbírálása ügyében 1914 nov. 15-én tartott bizottsági ülésről.

Jelen vannak: Rados Gusztáv bizottsági elnök, Beke Manó, Éber

József, Fejér Lipót, Kopp Lajos, König Dénes, Kürschák József, Zemplén Győző és Rátz László előadó.

Rátz László előadó jelentésének meghallgatása után a bizottság a következő egyhangú határozatot hozta :

A bírálóbizottság az első «br. Eötvös Loránd díj»-at *Zigány Ferencz*-nek ítéli oda, a ki a budapesti IV. ker. főreáliskolában Szücs Adolf dr. tanítványa volt. Az ő dolgozata az egyetlen, melyben a legtöbb invencziót igénylő második feladat helyesen van megoldva, és ezzel matematikai tehetségének jelét adta. A harmadik feladatot szintén egyszerűen és helyesen oldotta meg. Az első feladat megoldása azonban nem teljes.

A második díjat a bizottság *Prónai Jenő*-nek ítéli oda, ki a bpesti V. ker. állami főreáliskolában Obláth Richárd tanítványa volt. Az első és harmadik feladatot az összes pályázók között a legjobban oldotta meg és szabatos fogalmazásával fegyelmezett gondolkodást árult el. A második feladattal azonban nem foglalkozott.

Dicsérettel emeli ki a bizottság *Stern Pál* dolgozatát, melyben az első feladat egészen helyesen van megoldva. A második feladat megoldásában jó úton indult, de teljes eredményhez nem jutott.

A f. évi nov. 26-án tartott választmányi ülés a bizottság e javaslatát egyhangulag elfogadta és ezzel határozattá emelte.

Beke Manó
Éber József
br. Eötvös Loránd
Fejér Lipót
Kopp Lajos

König Dénes
Kürschák József
Rados Gusztáv
Rátz László
Zemplén Győző

★

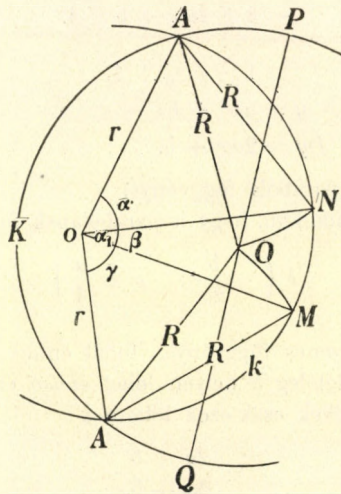
A választmányi ülést követő előadó-ülésen báró Eötvös Loránd elnök a nyerteseknek átadja a jutalmat, buzdító szavak kíséretében, és kérve, őket, hogy adják át tanáraiknak a Társulat üdvözlétét. — Elnök továbbá kifejezi Rados Ignác cz. középiskolai igazgatónak a Társulat köszönetét és elismerését Stäckel Pál heidelbergi egyetemi tanárnak a Bolyaiakról legutóbb írt művének magyar fordításáért és illetőleg kiadásáért, mely munka «*Bolyai Farkas és Bolyai János geometriai vizsgálatai*» czímen és 2. kötetben jelent meg 1914-ben, a Magyar Tud. Akadémia támogatásával. — Meleg szavakkal emlékezik meg elnök a hadbavonult tagtársakról, és különösen Homor Ernő tagtársunkról és munkatársunkról, a szegedi áll. főgymnasium tanáráról, mond kegyeletes szavakat, ki a harcmezőn hősi halált halt.

A Matematikai és Fizikai Társulat XXI. versenyén
b. Eötvös díjjal jutalmazott dolgozatok.*

I. Zigány Ferencz dolgozata.

1.

A K körvonal A és B pontjait egy k körív köti össze, mely a K kör területét két egyenlő részre osztja. Bizonyítandó, hogy a k körív hossza nagyobb, mint a K kör átmérője.



o és O pontok a k ill. K körök középpontjai α szögnek megfelelő ív k

$$ra_1 = k.$$

k két egyenlő részre osztja K kört, de K kört PQ átmérő is két egyenlő részre osztja. Ez csakis akkor lehetséges, ha k átmetszi PQ -t,

* A dolgozatok változtatás és javítás nélkül közöltetnek.

Szerk.

mert ha egészen PQ egyik oldalán feküdne, nem vághatná le a K kör területének a felét.

Már most, *szurjuk be a körzöt* A illetőleg B pontokba és rajzoljunk kört O -n keresztül, így N , M pontokhoz jutunk. Láthatjuk, hogy:

$$\begin{array}{r} \widehat{AN} > \overline{AN} = R \\ \widehat{BM} > \overline{BM} = R \\ \hline \widehat{AN} + \widehat{NM} + \widehat{MB} > 2R, \end{array}$$

tehát

$$k > 2R.$$

2.

Legyen

$$-1 \leq ax^2 + bx + c \leq +1,$$

ha

$$-1 \leq x \leq +1.$$

Itt a , b és c valós számokat jelentenek.

Bebizonyítandó, hogy akkor

$$-4 \leq 2ax + b \leq 4,$$

midőn

$$-1 \leq x \leq +1.$$

$$y = ax^2 + bx + c,$$

$$Dy = 2ax + b.$$

y függvény egy parabola függvénye.

(Csak zárjelbe mondom, hogy a parabolának fókusa

$$F\left(-\frac{b}{2a}; \quad c + \frac{a}{4}\right)$$

pont.)

$2ax + b$ egy egyenes függvénye, tehát ennek valamely a b intervallumban, csak a illetőleg b helyen lehet szélső értéke.

Tehát szélső értékek csak ezek lehetnek:

$$\begin{array}{l} 2a + b \\ -2a + b. \end{array}$$

A legelső egyenletből, ha $x = 1$:

III.

$$-1 \leq a + b + c \leq 1 \quad | \quad \overbrace{-1 - c \leq a + b \leq 1 - c}$$

ha $x = -1$:

$$-1 \leq a - b + c \leq 1$$

tehát

$$-1 \leq a + c \leq 1 \quad | \quad -1 - c \leq a \leq 1 - c$$

ha $x = 0$:

$$-1 \leq c \leq 1,$$

legrosszabb esetben:

$$-2 \leq a \leq 2,$$

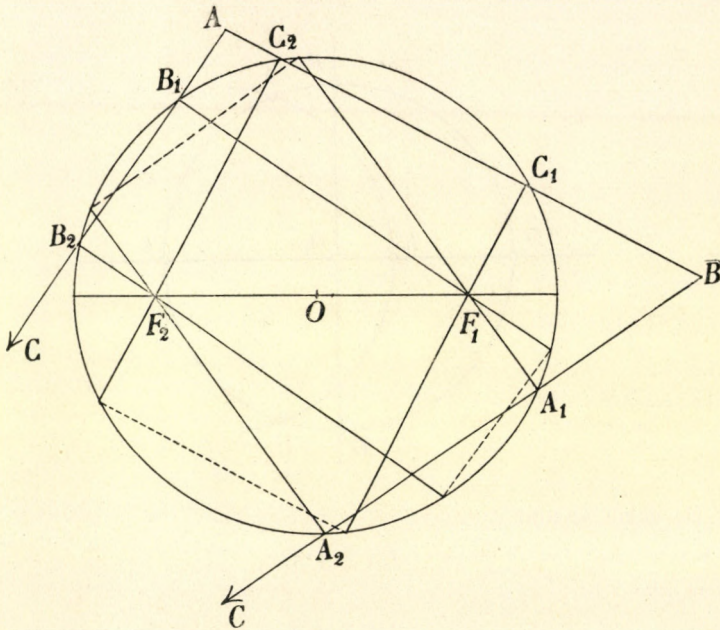
továbbá a III. sz. egyenletből a legrosszabb esetben:

$$-2 \leq a + b \leq 2$$

$$-4 \leq 2a + b \leq 4.$$

3.

Messe a K kör az A, B, C háromszög BC, CA, AB oldalait rendre az $A_1A_2; B_1B_2; C_1C_2$ pontokban. Bebizonyítandó, hogy ha az $A_1B_1C_1$ pontokban rendre a BC, CA, AB oldalakra emelt merőleges egyenesek



egy pontban találkoznak, akkor az A_2, B_2, C_2 pontokban BC, CA, AB oldalakra rendre emelt merőlegesek is egy pontban találkoznak.

C_1C_2 húrra a C_1, C_2 pontokban állított merőlegesek úgy fekszenek a körhöz viszonyítva, hogy minden az O -n a kör középpontján átmenő egyenesnek, a velük való metszéspontjai szimmetrikusan fekszenek az

O -ra nézve. Ugyan azt állíthatjuk a B_1B_2 -ben, illetőleg A_1A_2 -ben állított merőlegesekre is.

De mivel A_1 , B_1 , C_1 -ben állított merőlegesek egy pontban, F_1 -ben metszik egymást, így F_1 -nek O -ra nézve szimmetrikus pontja F_2 , kell hogy közös pontja legyen az A_2 , B_2 , C_2 -ben állított merőlegeseknek.

(Az F_1 és F_2 elnevezések a kúpszeletek fókuszaira emlékeztessenek.)

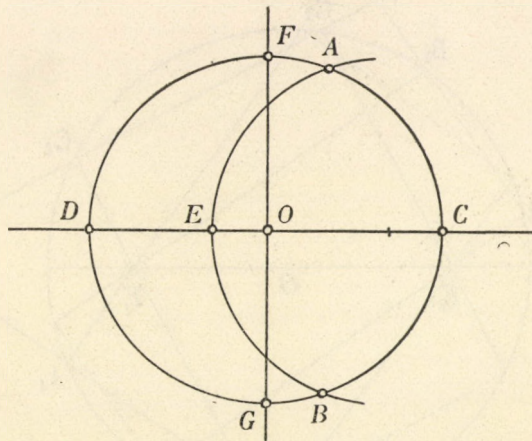
II. Prónai Jenő dolgozata.

1.

Feltétel szerint $ACBE$ körrész $= ADBE$ körrészzsel, vagyis

$$ACE + BCE = ADE + BDE.$$

I. Ebből következik, hogy az A és B pontok nem lehetnek az FG egyenes azon oldalán, amelyen E pont.



De akkor viszont

$$\widehat{EA} > \overline{OA},$$

mert már

II.

$$\widehat{EA} > \overline{OA}.$$

Ép így

$$\widehat{BE} > \overline{BO}.$$

Ezekből

$$\widehat{EA} + \widehat{BE} = k > \overline{OA} + \overline{OB} = 2R,$$

tehát

$$k > 2R.$$

I. pont alatti bizonyítása:

Vegyük fel, hogy mind a három pont A , B és E fekszik az FG egyenes egy oldalán és a feltétel mégis igaz, akkor lesz

$$AEBC + AEBGF = FDG,$$

vagyis

$$AEBC \neq FDG,$$

vagyis a kör felével, tehát ellenmondás áll fenn és így nem igaz az a feltevés, hogy a három pont lehet az FG egyenes egyik oldalán.

II. pont bizonyítása az OEB háromszögből, a hol EOB tompa szög és OEB hegyes szög.

3.

Legyen M az A_1 , B_1 és C_1 -ben emelt merőlegesek találkozó pontja.

Az A_1A_2 , B_1B_2 és C_1C_2 felező normálisai a kör középpontján O -n mennek keresztül (húrokra emelt merőleges).

Az A_2 -ben emelt merőleges az OM egyenes meghosszabbítását O -tól OM távolságra metszi (sugár-rendszerben húzott párhuzamosok). És így van B_2 és C_2 pontokkal is.

Tehát mind a három merőleges egy pontban metszi az OM egyenes meghosszabbítását.

És így mind a három egyenes egy pontban találkozik is.



THE
OFFICE OF THE
SECRETARY OF THE
NAVY
WASHINGTON, D. C.

TO THE
HONORABLE
MEMBERS OF THE
NAVY

THE
OFFICE OF THE
SECRETARY OF THE
NAVY
WASHINGTON, D. C.

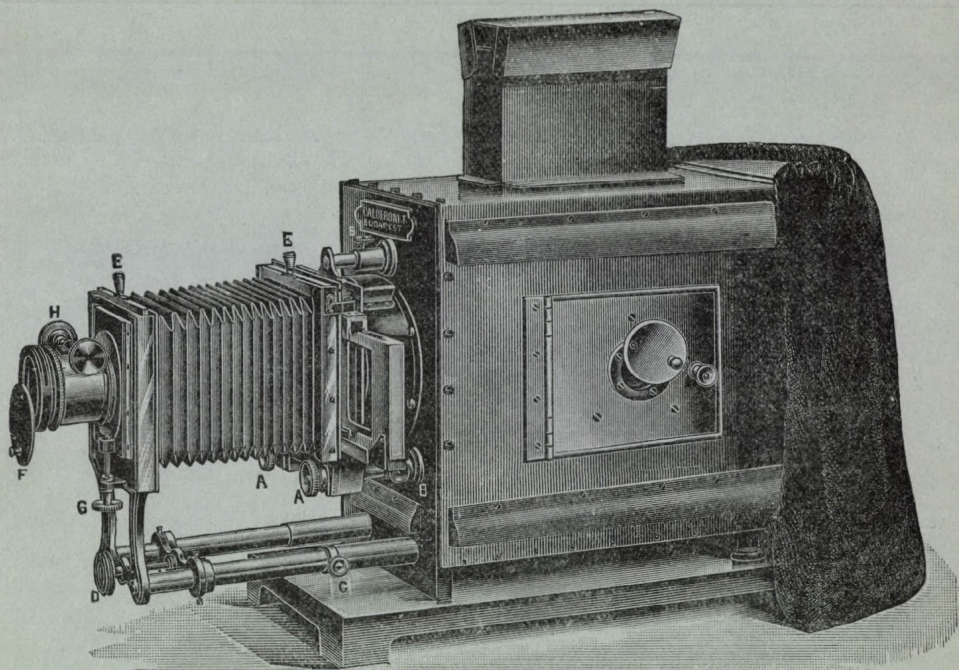
THE
OFFICE OF THE
SECRETARY OF THE
NAVY
WASHINGTON, D. C.

THE
OFFICE OF THE
SECRETARY OF THE
NAVY
WASHINGTON, D. C.

Calderoni mű- és tanszervállalat r.-t.

Budapest, IV., Váci-utca 50.

Ajánlja saját szerkesztésü szabadalmazott vetítőkészülékeit.



Vetítőkészülék «Calderoni B»

Ezen készülék lámpa-szekrénye legjobb minőségű aczélemezekből van készítve, eternit-béléssel és kitűnő szellőztető szerkezettel van ellátva, 120 mm. atm. kettős megvilágítólenesével (Kondensor), hajtócsavarral ellátott objektív-foglalattal, egy ebbe illő kitűnő vetítési objektívvel, a finom beállítás részére szolgáló mikrometer-csavarral és tolószerkezettel ellátott kettős kép-váltó kerettel van felszerelve. A kondensor-lencsék a lámpatartó szekrényen kívül vannak elhelyezve és a lencsék közt felmelegedő levegő a kondensortartó cső felső részén levő és egy kis fedővel borított nyíláson át távozhatik. A kondensor mögött egy kali-üvegből készített védőlemez van elhelyezve. — A készülék, mely egy áttört vastalapzatra van felszerelve, teljesen fémből van készítve. — A bronzból készített objektívet tartó előrész egy mikrometer-csavar segélyével magasabbra és mélyebbre állítható. Az oldalajtóval és bárszónyból készült fényelzáró-függönynyel ellátott készülék ára fenti felszereléssel *lámpa nélkül*

K 260.—

Vetítőkészülék «Calderoni I. H.»

Ezen készülék, mely ugyanolyan szerkezetű mint a túloldali, egy általunk szerkesztett hűtővel van még ellátva, mely a megvilágító lencsék közé van iglatva. — Ezen felszerelés vetítő készülékünket a legtekélyesebb ilyenmő készülékké avatja. Ára *lámpa nélkül* K 350.—

A vetítőkészülékeinkhez felszerelt hajtócsavarral ellátott objektív foglalatba tetszés szerinti 6 különféle gyútávolságu vetítési objektívet lehet elhelyezni, melynek gyútávolsága 150, 200, 250, 310, 355, 405, mm. — Minden készülékhez a fentjelzett árban csak egy darab ilyen vetítési objektív tartozik. — Minden további objektív ára darabonként K 24.—

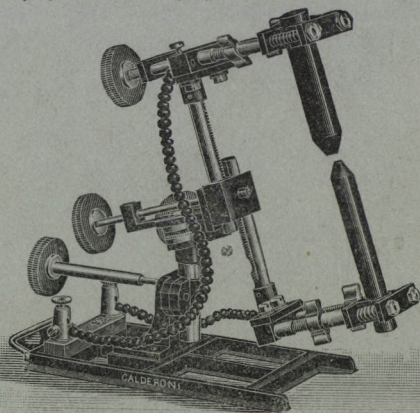
Vetítőkészülékeink a merőleges és vízszintes sfkban végbemenő vetítésre, valamint mikroszkopikus vetítésre is, úgy szintén szinképek, interferenciális tűnámények, fényelhajlási, fény-arkitási és kettős törési kísérletek stb. vetítésére is alkalmasak. Ezen mellékeszközökrői addig is, míg az ezekről szóló külön árjegyzékünk meg fog jelenni, kívánatra szívesen küldünk részletes költségvetéseket. Vetítőkészülékeinket — melyek a legtekélyesebbek — tetszés szerinti fényforrással, u. m. villamos ívfénnyel, mészfényvel, acetylénnel, borszesz-izzófényvel stb. szállítjuk.

Elektromos ívlámpa

legjobb minőségű és felette erős szerkezetű (mellékelt ábra szerint) mely hajtócsavarok segélyével minden irányban könnyen mozgatható, 110—220 volt feszültségű egyen- vagy váltóáramhoz, 5—50 Ampère áramerősségig használható. Ára K 120.—

Elektromos ívlámpa

egyszerűbb és könnyebb szerkezetű. Ára K 90.—



Borszesz-izzófénylámpa légsűrítővel ellátva, mely 300 gyertyafény erejű világítást szolgáltat. Ára teljesen felszerelve K 50.—

Háromlábú asztalállvány, mely hajtócsavar-szerkezet segélyével magasabbra és mélyebbre állítható, felső lapja pedig a vetítőkészülék által esetleg megkívánt szög alá, illetve ferde állásba hozható. Ára K 110.—

Vetítési ernyő finom vászonból 200 cm. négyzetben, gyűrűkkel ellátva. Ára K 8.—

Ernyő-állvány fenti ernyő részére, mely könnyen és gyorsan szétszedhető. Ára szekrényben K 30.—

Vetítési ernyők zsinórral felhúzható szerkezettel. — Ezen ernyők legcélszerűbben a falra erősítendő 2 vastámaszra szerelendők, azonban bárhová, esetleg közvetlenül a falra is felelősíthetők. — Az ernyők árai a következők:

	200	240	300	360	420	480 cm. négyzetben
Ára	45.—	65.—	90.—	145.—	200.—	240.— korona.

Calderoni mű- és tanszervállalat részvénytársaság, Budapest, IV, Váci-utca 50.

Részletes nagy árjegyzék vetítőkészülékeinkről munkában van.